TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta pedagogická

DIPLOMOVÁ PRÁCE

2006 Jana Suchanová

Technická univerzita v Liberci
FAKULTA PEDAGOGICKÁ

Katedra: matematiky a didaktiky matematiky
Studijní program: 2. stupeň
Kombinace: matematika – informatika

KOMBINATORIKA V ÚLOHÁCH

Combinatorics in problems
Die Kombinatorik in den Aufgaben

Diplomová práce: 06–FP–KMD–001

Autor: Jana Suchanová

Podpis:

Adresa:
Karla Čapka 1410
356 01 Sokolov

Vedoucí práce: RNDr. Jana Příhonská Ph.D.

Počet

stran	slov	grafů	tabulek	příloh
78	10596	5	4	2

V Liberci dne: 20. prosince 2005

Technická univerzita v Liberci
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
461 17 LIBEREC 1, Hálkova 6 Tel./Fax: +420.485 352 332

Katedra: *matematiky a didaktiky matematiky*

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(závěrečného projektu)

Diplomant: *Jana SUCHANOVÁ*
Adresa: *Karla Čapka 1410, 356 01 SOKOLOV*
Obor: *matematika (pro 2. stupeň škol) – informatika*

Název DP: ***KOMBINATORIKA V ÚLOHÁCH***

Název DP v angličtině: ***COMBINATORICS IN PROBLEMS***

Vedoucí práce: *RNDr. Jana Příhonská*
Termín odevzdání: *květen 2005*

Pozn.: Podmínky pro zadání práce jsou k nahlédnutí na katedrách. Katedry rovněž specifikují zadání: východiska, cíle, předpoklady, metody zpracování, základní literaturu (zpravidla na rub tohoto formuláře). Zásady pro zpracování DP lze zakoupit v Edičním středisku TU a jsou též k dispozici v UK TUL, na katedrách a na Děkanátě Fakulty pedagogické.

V Liberci dne *6. 6. 2004*

vedoucí katedry *děkan*

Převzal(a) diplomant(ka):

Datum: 10. 11. 2004 Podpis: Suchanová

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce.

V Liberci dne 20. prosince 2005 Jana Suchanová

Poděkování:

„Děkuji všem, kteří mi pomáhali při tvorbě mé diplomové práce. Vedoucí práce prof. RNDr. Janě Příhonské Ph. D. děkuji za odbornou pomoc a cenné připomínky. Dík náleží mým přátelům, kteří mě během mé práce povzbuzovali a v neposlední řadě děkuji svým rodičům za finanční a morální podporu v průběhu celého studia.“

KOMBINATORIKA V ÚLOHÁCH

Suchanová Jana **DP–2006** **Vedoucí DP:** RNDr. Jana Příhonská Ph.D.

Resumé
Diplomová práce se zabývá problematikou kombinatoriky na základní škole, což je, vzhledem k nedostatku času na její zařazení, často opomíjené učivo. Práce nejprve vymezuje základní kombinatorické pojmy, pak zkoumá úspěšnost řešení před a po jejich systematickém procvičení. Uzavírá ji soubor kombinatorických úloh s gradovanou obtížností a různými metodami jejich řešení, včetně použití příslušných vzorců. Jedná se převážně o praktické lehce pochopitelné úlohy. V příloze jsou kopie některých žákovských prací, na nichž tyto zjištěné poznatky dokládáme.

Combinatorics in Problems

Summary
This diploma thesis deal with problems of combinatorics at the primary school, which is, regarding a poverty of time on her integrating into the curiculum, often neglected subject matter. The work defines the basic combinatorial notions first, then explores fruitfulness solvings before and after their systematic practise. Concludes her the set of combinatorial exercises with graduated difficulties and by various methods of their solving, including of appropriate figures conclude the topics. It´s based on practical lightly comprehensive exercises. It is closed by the copies of some pupil´s works, on which we illustrate empirical evidences.

Die Kombinatorik in den Aufgaben

Zusammenfassung
Die Diplomarbeit befasst sich mit der Problematik der Kombinatorik an der Grundschule, denn sie im Bezug auf ihre Zeiteinordnung, oft unterlassene Lehrstoff ist. Die Arbeit grenzt zuerst die Grundbegriffe der Kombinatorik an, dann beobachtet sie das Lösungserfolg vor und nach ihrer systematischen Einüben. Sie ist mit dem Komplex der kombinatorischen Aufgaben mit der kühlerturmen Schwierigkeit und mit ihren verschiedenen Lösungsmethoden, im Zahl der Anwendung der jeweiligen Formeln gespert. Es handelt sich überhaupt um die praktische, leicht verstehende Aufgaben. In der Beilage sind die Kopien einigen Schülerarbeiten belegt, an ihnen wir diese nachgewiesene Erkenntnisse demonstrieren.

OBSAH

1. Obecný úvod

Kombinatorika hraje v rozvoji matematického myšlení výraznou roli. Její význam je zejména v rozvoji logického myšlení, obecných kombinačních schopností a v neposlední řadě ji lze také považovat za základ pro následné řešení různých pravděpodobnostních problémů.

Je učivem hlavně středních škol, kde se omezuje na klasickou problematiku vytváření skupin předmětů a určování počtů všech skupin, které splňují určité podmínky. Na základní škole se s ní setkávají pouze žáci navštěvující školy s rozšířenou výukou matematiky.

Různé kombinatorické úlohy se vyskytují často v matematických olympiádách a dalších soutěžích. Kromě toho se podle způsobů jejich řešení dá zjistit úroveň znalostí a schopnost využít metod řešení nejen v kombinatorice.

Na druhém stupni nespecializovaných základních škol se kombinatorické úlohy řeší také, ale pouze intuitivně, úsudkem nebo dosazováním hodnot bez použití vzorců a obecných kombinatorických pravidel.

Cílem této práce je zjistit, jaké znalosti žáci základní školy mají a hlavně jak jsou schopni s nimi pracovat a využívat je.

Dále sestavit soubor kombinatorických úloh od nejjednodušších ke složitějším a ukázat různé metody řešení. Uvést spíše praktické úlohy a ukázat jejich využití v běžném životě mimo školu.

Dané téma jsem si zvolila, neboť si myslím, že tyto úlohy jsou ve vyučování často opomíjeny. Je tomu hlavně z nedostatku času na probrání a následné procvičení. Podle mého mínění jim není věnována dostatečná pozornost i přesto, že mají hlubší význam pro rozvoj dalších schopností žáků a jsou velmi úzce spjaty s různými nejen matematickými problémy.

2. Teoretická část

2.1 Historie kombinatoriky

2.1.1 První úlohy

Kombinatorika na rozdíl od mnohých jiných částí matematiky nepochází z Řecka. První zmínky o úlohách z kombinatoriky nacházíme v Indii. Například v lékařském spise Susruta se jeho čtenáři už v 6. století před n. l. mohli dočíst, že šesti různými základními příchutěmi se dá dosáhnout celkem 63 chutí.

Výsledky úloh v tomto období autoři nacházejí vypsáním všech možností, takže nevíme, zda znali i nějaké všeobecné vzorce. Ty už ale můžeme předpokládat u Varahamihira, který, chystajíc se vyrábět parfémy, uvažoval, že když vždy smíchá 4 ze 16 základních ingrediencí, tak dostane 1820 nadějných voňavek, což zřejmě nemohl zjistit vypisováním všech možností.

2.1.2 První kniha

Pak přišla mystická židovská kniha s hebrejským názvem Sefer Yetzirah. Ta tvrdila: „Ze dvou kamenů postavíš dva domy, ze třech kamenů postavíš šest domů, … atd.“ Její autor tedy už ve 3. století našeho letopočtu nehovoří o ničem jiném, než o faktoriálech.

Mnozí další autoři židovského a islámského světa se zabývali hlavně úlohami o počtu slov, které je možné sestavit z daného počtu písmen v abecedě, stále jim však chyběla zobecnění. Až Abraham ibn Ezra (1090 – 1167), rabín žijící ve Francii, se na to zřejmě nemohl dívat, a tak pozorováním hvězd podrobně odvodil pravidlo na výpočet *k*-prvkových kombinací ze 7 prvků. Udělal to proto, že ho zajímal počet všech možných konjunkcí sedmi planet, které v té době podle něho pozoroval.

Od 13. století se už v mnohých pracích objevují i kombinatorické důkazy a°matematici odvozují vztahy daleko složitější, než běžně používáme. **[2]**

2.1.3 Kombinatorika v hrách

Matematici v západních kulturách ji objevili až v 17. století a v úplně jiných souvislostech. Tehdy v životě privilegovaných vrstev společnosti zaujímaly značné místo hazardní hry. V kartách a kostkách se vyhrávaly a prohrávaly brilianty, zlato, paláce a statky, koně i drahé šperky. Také byly rozšířeny rozmanité loterie. Proto se kombinatorické úlohy zpočátku týkaly především těchto her. Řešily se například problémy kolika způsoby může při daném počtu vržených kostek padnout určitý počet ok, nebo kolika způsoby lze získat dva krále v jisté karetní hře. Tyto problémy byly hybnou silou v rozvoji nejen kombinatoriky, ale také teorie pravděpodobnosti, které se rozvíjely souběžně.

Jedním z prvních, kdo začal počítat různé kombinace při hře v kostky, byl italský matematik Niccolo Tartaglia. Sestavil tabulku, v níž je uvedeno, kolika způsoby může padnout na r kostkách s ok. Z počátku se zde vyskytovaly různé nedostatky. Nepřihlížel např. k tomu, že jeden a týž součet ok lze získat různými způsoby (např. 1+3+4=4+2+2).

2.1.4 Počátky teorie

Teoretické otázky kombinatoriky začali zkoumat v 17. století francouzští vědci Blaire Pascal a Pierre Fermat. Předmětem jejich zkoumání byly opět hazardní hry. Velký význam měla úloha o rozdělení sázky, kterou Pascalovi předložil jeho přítel, vášnivý hráč, Chevalier de Méré. Šlo o „Zápas“ hlava – orel, který se hraje do 6 vyhraných partií. Problém vznikl, když musel být přerušen v době, kdy jeden hráč měl 5 a druhý 4 vyhrané partie. Jak tedy rozdělit vsazené peníze? Bylo jasné, že rozdělení v poměru 5:4 by nebylo spravedlivé. Pascal použil metody kombinatoriky a řešil tento problém v obecném případě, kdy jednomu hráči zbývá ještě vyhrát *r* partií a druhému *s* partií. Touto úlohou se zabýval i Pierre Fermat, ale ten došel k jinému řešení.

Další rozvoj kombinatoriky je spojen se jmény Jakob Bernoulli, G. W. Leibniz a Leonhard Euler. I u nich byly hlavními aplikace na různé hry (loto, pasiáns atd.).

2.1.5 Současná situace

V posledních letech se tato důležitá oblast matematiky bouřlivě rozvíjela, plyne z toho, že se všeobecně zvýšil zájem o problémy diskrétní matematiky. Kombinatorických metod se používá při řešení úloh s dopravní tématikou (např. při sestavování jízdních řádů), při vypracovávání plánů výroby a realizace produkce. Existuje řada spojení mezi kombinatorikou a úlohami lineárního programování, statistiky atd. Používá se při sestavování a luštění šifer a pro řešení dalších problémů teorie informace.

Přestavitelé nejrůznějších specializací potřebují mnohdy řešit úkoly, v nichž se zkoumají rozmanité kombinace sestavené z písmen, číslic a jiných objektů. Vedoucí dílny má například rozdělit několik druhů práce obráběcím strojům, agronom musí umístit osevy zemědělských kultur na několik polí, zástupce ředitele školy sestavit rozvrh hodin, vědec-chemik prozkoumat možná spojení mezi molekulami a atomy, lingvista uvážit různé varianty významu písmen neznámého jazyka atd.

Svými metodami a pojmy se uplatňuje i v řadě dalších odvětví matematiky, zejména v algebře (v teorii grup a jejich reprezentací), teorii čísel, teorii pravděpodobnosti, teorii her, v geometrii (při zkoumání jejích základů), ale i v topologii a matematické analýze. Pro partie kombinatoriky rozvíjené ve 20. století se také používá název kombinatorická analýza. **[7]**

2.2 Základní pojmy kombinatoriky

Kombinatorika se zabývá studiem **konečných** uspořádaných nebo neuspořádaných množin a jejich částí. Máme konečnou množinu **N** všech přirozených čísel bsahující *n* prvků, z nich vybíráme množiny nebo uspořádané *k*-tice. Pro *k* a *n* platí, že $k \in \mathrm{N}$ a $n \in \mathrm{N}$. **[4]**

Zavedeme si základní pojmy, které budeme používat při výpočtech. Některé úlohy se vyskytují často, nazýváme je „standardní úlohy“. Pro jejich výpočet používáme dále předepsané vzorce. V některých případech budeme k řešení využívat též metodu výpisu možností.

Další pojmy, se kterými se setkáme v uvedených vzorcích, si zavádíme postupně v poznámkách.

2.2.1 Výpis možností

Výpis možností je nejobvyklejší způsob řešení, jenž může využít kdokoliv i přesto, že se dosud nesetkal s obecnými pravidly kombinatoriky. Spočívá v systematickém prohledávání a vyjmenovávání všech eventualit.

Tento postup není vždy snadný, u úloh s velkým počtem řešení je jejich výpis příliš zdlouhavý a obtížný.

2.2.2 Obecná pravidla kombinatoriky

Kombinatorické úlohy bývají velmi rozmanitých typů. Ale většinu z nich lze řešit pomocí dvou základních pravidel - užitím kombinatorického pravidla součtu a kombinatorického pravidla součinu.

2.2.2.1 Kombinatorické pravidlo součtu

Prvním pravidlem je **kombinatorické pravidlo součtu**. To používáme, když se nám podaří rozdělit zkoumané skupiny do několika tříd, přičemž každá skupina patří právě do jedné třídy. Je zřejmé, že pak je celkový počet skupin roven součtu počtů skupin ve všech třídách (za podmínky, že ani jedna z uvažovaných skupin nepatří do dvou nebo více tříd, tzn. že třídy jsou disjunktní).

Jestliže množina A_1 obsahuje n_1 prvků, množina A_2 má n_2 prvků, …, množina A_k má n_k prvků a jestliže každé dvě z množin $A_1, A_2, ..., A_k$ jsou disjunktní (tzn. průnik libovolných dvou množin je prázdný, tj. $A_i \cap A_j = 0$ pro $i \neq j$ kde $i, j = 1,2,...,k$), pak počet všech prvků sjednocení množin $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ je roven součtu $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$. **[4]**

2.2.2.2 Kombinatorické pravidlo součinu

Druhé pravidlo, které nazýváme **kombinatorickým pravidlem součinu**, je poněkud složitější. Při sestavování skupin o dvou prvcích je často známo, kolika způsoby můžeme vybrat první prvek a kolika způsoby prvek druhý, přitom počet způsobů výběru druhého prvku nezávisí na tom, jak byl vybrán první prvek. Nechť první prvek je možno vybrat *m* způsoby a druhý prvek *n* způsoby. Pak skupinu těchto prvků (m, n) lze vybrat $m \cdot n$ způsoby.

Jestliže množina A_1 obsahuje n_1 prvků, množina A_2 má n_2 prvků, množina A_k má n_k prvků, pak počet všech možných uspořádaných *k*-tic, jejichž první složkou je libovolný prvek množiny A_1, druhou složkou libovolný prvek množiny A_2, …, *k*-tou složkou libovolný prvek množiny A_k, je roven součinu $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$. **[4]**

2.2.3 Variace

2.2.3.1 Variace bez opakování

k-členná variace bez opakování z *n* prvků je každá uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto *n* prvků tak, že všechny prvky v ní jsou různé (tj. neopakují se). **[4]**

Tzn. že z množiny *n* objektů sestavujeme všechny možné skupiny o *k* předmětech, tzv. *k*-tice. Přitom dvě skupiny považujeme za různé, když se liší aspoň jedním prvkem nebo když se skládají z týchž prvků, jež jsou však rozestaveny v odlišném pořadí. **[7]**

Počet těchto variací znamená kolik různých *k*-tic lze takto utvořit. Značíme ho *V(k, n)* a počítáme podle vzorce

$$V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)\,.$$ **[4]**

<u>*Poznámka:*</u>

Symbol $n!$ nazýváme *n* faktoriál a znamená součin všech přirozených čísel od 1 do *n*.

Definuje se tedy:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \quad \text{pro každé } n \in N\,.$$

$$0! = 1$$ **[4]**

2.2.3.2 Variace s opakováním

k-členná variace s opakováním z *n* prvků je každá uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto *n* prvků, přičemž všechny prvky v ní nemusí být různé (tj. mohou se opakovat). **[4]**

Tzn. že z množiny n objektů sestavujeme všechny možné skupiny o k předmětech, tzv. k-tice. Přitom se v těchto skupinách mohou předměty téhož druhu vyskytovat i vícekrát. **[7]**

Počet těchto variací znamená kolik různých k-tic lze takto utvořit. Značíme ho $V'(k,n)$ a počítáme podle vzorce

$$V'(k,n) = n^k \text{ . } \textbf{[4]}$$

2.2.4 Permutace

2.2.4.1 Permutace bez opakování

Permutace bez opakování z n prvků je každá n-členná variace z daných n prvků neboli každá uspořádaná n-tice sestavená z těchto n prvků. **[4]**

Můžeme také říci, že permutacemi z n prvků nazýváme skupiny o n prvcích, z nichž libovolná obsahuje každý právě jednou a prvky se vzájemně odlišují pouze pořadím. **[7]**

Počet těchto permutací znamená kolik různých n-tic lze takto utvořit. Značíme ho $P(k,n)$ a počítáme podle vzorce

$$P(n) = n!.$$ **[4]**

2.2.4.2 Permutace s opakováním

Permutace k prvků s opakováním z n prvků je každá uspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků tak, že se v ní některé ze zvolených prvků mohou opakovat, přičemž 1. prvek se opakuje k_1-krát, 2. prvek se opakuje k_2-krát, …, n-tý prvek k_n-krát.

Počet těchto permutací znamená kolik různých k-tic lze takto utvořit. Značíme ho $P'(k_1,k_2,...,k_n)$ a počítáme podle vzorce

$$P'(k_1,k_2,...,k_n) = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_n!}$$

pro k_i platí, že $\sum_{i=1}^{n} k_i = n$. **[4]**

2.2.5 Kombinace

2.2.5.1 Kombinace bez opakování

k-členná kombinace bez opakování z *n* prvků je každá neuspořádaná *k*-tice (množina *k* prvků) vybraná z daných *n* prvků. V množině se žádné prvky neopakují.

Počet těchto kombinací znamená kolik různých *k*-tic lze takto utvořit. Značíme ho $K(k,n)$ a počítáme podle vzorce

$$K(k,n) = \frac{V(k,n)}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$ **[4]**

<u>*Poznámka:*</u>

Symbol $\binom{n}{k}$ čteme „*n* nad *k*" a nazýváme ho kombinačním číslem. Pro každé $n,k \in N_0, k \leq n$ platí:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$ **[4]**

2.2.5.2 Kombinace s opakováním

k-členná kombinace s opakováním z *n* prvků je každá neuspořádaná *k*-tice sestavená z těchto *n* prvků, přičemž všechny prvky v ní nemusí být různé (tj. mohou se opakovat).

Počet těchto kombinací znamená kolik různých *k*-tic lze takto utvořit. Značíme ho $K'(k,n)$ a počítáme podle vzorce

$$K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}.$$ **[4]**

3. Stanovení hypotéz

Budeme sledovat důkladnou práci s textem úloh a její vliv na úspěšnost řešení. Dále nás zajímá, zda, případně jak se projeví zlepšení žáků po systematickém procvičení nových metod.

3.1 Hypotéza 1

Úspěšnost řešení je do jisté míry ovlivněna srozumitelností textu úlohy a jeho správným porozuměním. Lze očekávat obtíže u 1. úlohy pretestu, kde žáci mohou nepozorně, nebo ne zcela dočíst zadání. Úloha se tím stane obtížnější, což se může odrazit v úspěšnosti řešení.

3.2 Hypotéza 2

Systematické procvičování obdobných úloh vede k rozvoji a využívání dalších možných řešitelských strategií. Dá se předpokládat, že po procvičení obdobných úloh se výsledky druhého testu zlepší a žáci zde využijí dalších možných strategií řešení.

4. Praktická část

Experiment byl prováděn na Základní škole Švabinského v Sokolově. Jedná se o školu s rozšířenou výukou matematických a přírodovědných předmětů. Tuto třídu navštěvuje 26 žáků, 11 děvčat a 15 chlapců, vybraných z celého Sokolovského okresu.

Skládal se ze tří fází. Dvou testů - pretestu a závěrečného testu. Mezi ně bylo vloženo procvičení standardních úloh a nastínění dalších možných řešitelských strategií.

Tomuto experimentu byly věnovány 4 vyučovací hodiny. V první byl zadán úvodní test. V následující proběhlo shrnutí řešení těchto úloh, které žáci použili, upozornění na chyby a nastínění dalších možných postupů. Pak byly ještě procvičovány obdobné úlohy uvedené též v souboru úloh. V poslední hodině byl zadán retest na ověření poznatků získaných z procvičení.

4.1 Pretest

4.1.1 Charakteristika pretestu

Skládal se ze tří úloh. První dvě byly na výpočet variací bez opakování a třetí na počet kombinací také bez opakování. Příklady byly voleny s přihlédnutím k právě probíranému učivu podmnožin.

K úspěšnému řešení textu bylo nutné, aby žáci rozuměli pojmu množina, podmnožina a byli schopni pracovat s textem úlohy a správně si jej rozebrat.

Cílem tohoto pretestu bylo zjistit, zda požadované znalosti žáci mají, abychom na ně mohli navazovat. Důležitý byl k následnému porovnání se závěrečným testem po procvičení různých úloh. Sloužil také jako směrnice k určení rozvoje v použití dalších možných řešitelských strategií.

4.1.2 Vzorové zadání testu

Úloha 1

Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvořte všechna možná dvojciferná čísla. Číslice se v sestavovaném čísle nesmí opakovat.

Úloha 2

Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvořte všechna možná trojciferná čísla. Číslice se v sestavovaném čísle nesmí opakovat.

Úloha 3

Sešlo se 5 přátel Petr, Ivan, Eva, Adam, Bára a navzájem si podali ruce. Určete kolik bylo podání rukou.

4.1.3 Charakteristika úloh

Úloha 1

Je úlohou na počet variací bez opakování. Patří mezi ty jednodušší, snadno řešitelné výpisem všech možností, neboť je jich málo a lze je snadno nalézt.

Úloha 2

Druhá je také na výpočet variací bez opakování. Lze ji též řešit výpisem všech možností i když je to o něco složitější než u předchozí úlohy pro větší počet řešení.

Úloha 3

Poslední je na počet kombinací bez opakování. Týká se situace dobře známé z běžného života a je tedy lehce představitelná. Patří tím mezi ty jednodušší a snadno pochopitelné.

Na této úloze demonstrujeme celou škálu řešitelských strategií. Můžeme ji považovat za vhodnou k rozvoji schopností žáka řešit úlohy.

4.1.4 Vzorové řešení

Úloha 1

1. způsob – pomocí vzorce

Variace bez opakování

$V(k,n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$ **[kapitola 2.2.3]**

V(2, 4) = 4 · 3 = 12

Dvouprvkových variací bez opakování ze čtyřprvkové množiny je ***12***.

2. způsob – výčtem možností

Nejjednodušší a zároveň nejpoužívanější je způsob vypisování čísel podle první číslice. Na první místo si dosazujeme každou ze čtyř číslic. Na druhém místě pak postupně obměňujeme ty ostatní.

Rozdělíme je podle prvních číslic:

12	21	31	41
13	23	32	42
14	24	34	43

Možností je ***12***.

3. způsob – logicky

Tento způsob spočívá v tom, že si žák uvědomí, že má 4 číslice, ze kterých tvoří dvojciferné číslo. Na místo první cifry má tedy 4 různé možnosti dosazení. Za druhou mu ale zbývají už pouze 3, neboť číslice se v číslech nesmí opakovat. Využívá se zde tedy kombinatorického pravidla součinu.

Možností je tedy:

4 · 3 = ***12***

Můžeme též uvažovat, že všechna dvojciferná čísla z daných číslic dostaneme tak, že na každou pozici použijeme jednu ze 4 číslic. Musíme si ale uvědomit, že mezi takto vytvořenými čísly jsou i čísla s opakujícími se číslicemi

(11, 22, 33, 44), tj. čtyři možnosti. Musíme je proto vyloučit. Celkový počet hledaných čísel je tedy:

$(4 \cdot 4) - 4 = 16 - 4 = \boldsymbol{12}$

Zjistili jsme počet možností a poté by následoval výčet prvků.

Poznámka:

Ukazuje se zde prolínání metod řešení.

Úloha 2

1. způsob – pomocí vzorce

Variace bez opakování

$V(k,n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$ viz **[kapitola 2.2.3]**

V(3, 4) = 4 · 3 · 2 = 24

Tříprvkových variací bez opakování ze čtyřprvkové množiny je ***24***.

2. způsob – výčtem možností

Nejjednodušší a zároveň nejpoužívanější je způsob vypisování čísel podle první číslice.

Rozdělíme je podle začínající:

123	124	132	134	142	143
213	214	231	234	241	243
312	314	321	324	341	342
412	413	421	423	431	432

Možností je ***24***.

3. způsob – logicky

Tento způsob je obdobný jako u dvojciferných čísel. Žák si uvědomí, že má 4 číslice, ze kterých tvoří trojciferné číslo. Na místě první cifry má tedy 4 různé možnosti dosazení. Za druhou mu ale zbývají už pouze 3, neboť číslice se v číslech nesmí opakovat. A na třetí místo už zbývají pouze 2 možnosti.

Možností je tedy:

$4 \cdot 3 \cdot 2 = \boldsymbol{24}$

nebo

Můžeme též uvažovat, že všechna trojciferná čísla z daných číslic dostaneme tak, že na každou pozici použijeme jednu ze 4 číslic.

Musíme si ale uvědomit, že mezi takto vytvořenými čísly jsou i čísla s opakujícími se číslicemi (111, 112, 113, 114, …,443, 444), tj. čtyřicet možnosti. Musíme je proto vyloučit, i když u tohoto příkladu je to o trochu obtížnější. Celkový počet hledaných čísel je tedy:

$4 \cdot 4 \cdot 4 - (4 + 3 \cdot 12) = 64 - 40 = \boldsymbol{24}$

Zjistili jsme počet možností a poté by následoval výčet prvků.

<u>*Poznámka:*</u>

Ukazuje se zde prolínání metod řešení.

Úloha 3

1. způsob – pomocí vzorce

Kombinace bez opakování

$$K(k,n)=\frac{V(k,n)}{k!}=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$ **[kapitola 2.2.5]**

$$K(2,5)=\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\cdot(5-2)!}=\frac{20}{2}=10$$

Dvouprvkových kombinací bez opakování z pětiprvkové množiny je ***10***.

2. způsob – výčtem možností

Petr — Ivan	Ivan — Eva	Eva — Adam
Petr — Eva	Ivan — Adam	Eva — Bára
Petr — Adam	Ivan — Bára	
Petr — Bára		

Adam — Bára

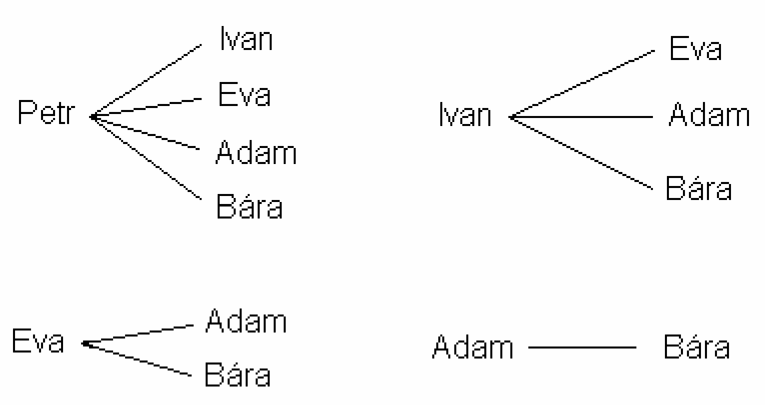
Možností je 4 + 3 + 2 + 1 = ***10***

3. způsob – logicky

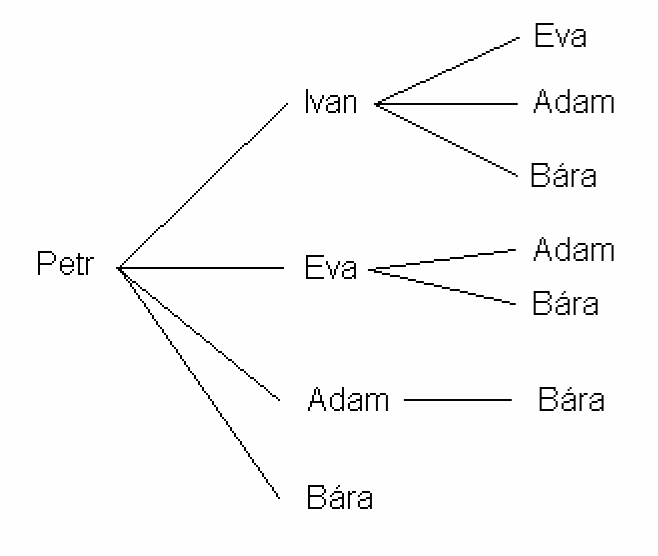
Je pět přátel, takže každý si podá ruku se 4 dalšími. Musíme ale uvážit, že každá dvojice přátel si podá ruku jen jednou. Tedy:

(5 · 4) : 2 = ***10***

4. způsob – logický strom možností



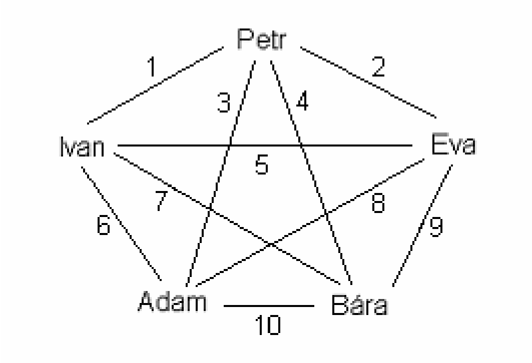
nebo



Možností je 4 + 3 + 2 + 1 = ***10***

5. způsob – graficky

Vypíšeme jednotlivé přátele, což jsou uzly a pak každou dvojici spojíme hranou, vznikne tím graf. K těmto hranám postupně připisujeme čísla, aby u každé bylo pouze jedno a takto je spočítáme.



Sečtením všech spojnic zjistíme, že možností je ***10***.

Poznámka:

Pojmem graf budeme rozumět neorientovaný graf, což je uspořádaná dvojice (U, H), kde U je množina prvků zvaných uzly grafu a H je podmnožina množiny všech dvouprvkových podmnožin množiny U, prvky množiny H se nazývají hrany grafu.

Máme dány objekty, které nazýváme uzly a spojujeme je úsečkami, kterým říkáme hrany. **[3]**

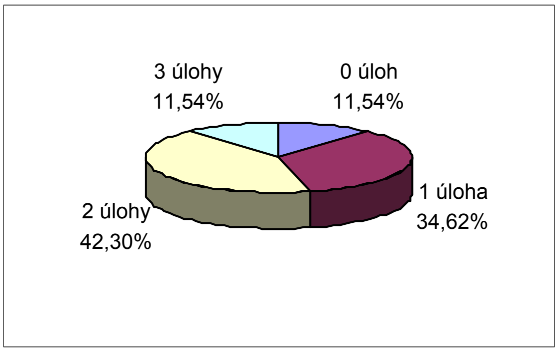
V našem případě uzlům odpovídají jednotlivé osoby a jeho hrany představují jednotlivá podání rukou.

4.1.5 Vyhodnocení pretestu

Celkové vyhodnocení

Pro většinu žáků tento test skončil dobře. Ze 26 řešitelů jich 88,46% uspělo alespoň v jedné úloze.

Graf č. 1: Počet vyřešených úloh pretestu (v %)



Ze třech úkolů, které byly zadány sice jen tři žáci splnili všechny zcela správně (viz příloha P1.2). Avšak pouze tři žáci nebyli schopni splnit ani jediný z úkolů. Z toho u jednoho chlapce to byla pouhá nepozornost a nepříliš vhodně zvolený systém. Jeho chybou v prvním a druhém příkladě bylo, že si vybral skupinu číslic, pak hledal všechny varianty, které mohl ze zvolených číslic vytvořit pouhou záměnou jejich pořadí. Ve třetím příkladě si opět zvolil zvláštní systém a i přes pěkný obrázek se správného výsledku nedobral (viz příloha P1.3).

Tab. č. 1: Použité metody řešení v jednotlivých úlohách pretestu

	metoda	*správně*	*špatně*	*celkem*
1. úloha	**výčet**	19	7	26
2. úloha	**výčet**	6	20	26
3. úloha	**výčet**	13	3	16
	logická úvaha	1	5	6
	logický strom	1	0	1
	graficky	0	1	1

V 1. a 2. úloze žáci použili pouze jediného způsobu řešení a to výpisu všech možností. U 3. úlohy se vyskytly čtyři různé metody. - výčet možností, logická úvaha, logický strom a postup pomocí grafu. Z nich největší část řešila pomocí výpisu možných řešení (viz příloha P1.4) a ostatní se vyskytly pouze vzácně.

V žádné z úloh nebyla použita metoda řešení pomocí kombinatorických vzorců, což se dalo očekávat, neboť se je dosud neučili a příslušné vztahy zatím neznají.

Vzhledem k tomu, že se jednalo o neprocvičené úlohy, lze celkovou úspěšnost pretestu 51,3 % považovat za velmi dobrou. Lepší výsledky můžeme sledovat u chlapců.

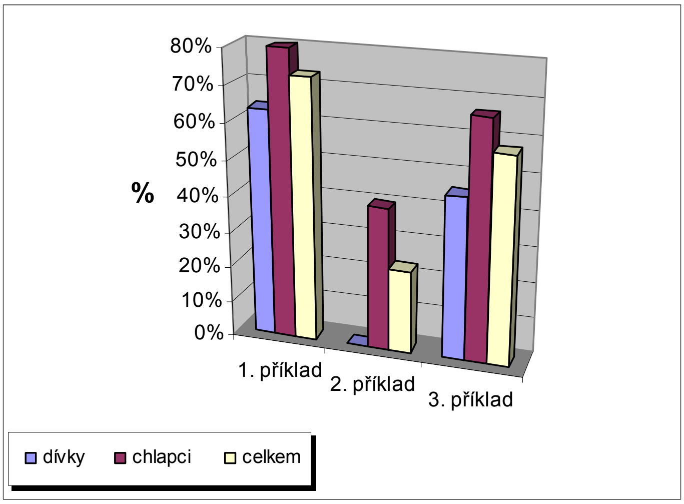
Tab. č. 2: Úspěšnost řešení žáků v jednotlivých příkladech pretestu (v %)

	dívky	**chlapci**	**celkem**
1. příklad	63,60%	80%	73,10%
2. příklad	0%	40%	23,10%
3. příklad	45,50%	66,70%	57,70%

V tabulce si můžeme všimnout, že největší úspěšnost se objevila u chlapců v řešení 1. příkladu. Nejmenší, dokonce nulová byla u děvčat ve 2. příkladě.

U chlapců jsem zaznamenala největší problémy se splněním správného úkolu. Většinou se zaměřili na špatný úkol (viz příloha P1.5). Pro děvčata bylo zřejmě složité na nějaký postup řešení přijít. Pokud se jim to podařilo, pak se žádné větší chyby už neobjevovaly. Neměla ani takový problém s nepřehledností řešení jako chlapci.

Graf č. 2: Počet vyřešených úloh u jednotlivých příkladů pretestu (v %)



Porovnáním počtu úspěšných řešitelů v jednotlivých příkladech si můžeme všimnout největší úspěšnosti v 1. úloze. Nejhůře naopak dopadla úloha 2 a to především díky děvčatům. Jejich úspěšnost v daném příkladě se samozřejmě promítla do celkové.

Úloha 1

Logicky tuto úlohu neřešil žádný žák. Obecného vzorce také nepoužil nikdo, neboť se jej žáci dosud neučili a nemohou tedy příslušné vztahy znát.

Všichni využili metody výpisu možností což je patrné z tabulky č. 1. Z celé třídy zde udělalo chybu 7 žáků. Z toho u 3 to byla chyba v opakování číslic a zbývající 4 si vypisoval i možnosti příliš nepřehledně, tudíž některé snadno vynechali a jiné napsali vícekrát (viz příloh P1.6).

Úloha 2

Zde žáci nevyužívali ani logického způsobu řešení, ani použití vzorce, to opět uvádíme v tabulce číslo 1.

Všichni se soustředili na výpis možností, což už zde bylo obtížnější a zdlouhavější. Tuto úlohu vyřešilo špatně 20 žáků, z nichž u 6-ti se číslice v číslech opakovaly. Dalších 12 udělalo chybu během vypisování, z toho u 6-ti šlo jen o drobné opomenutí. Zbývající 2 žákyně úlohu neřešily vůbec.

Úloha 3

Tato úloha byla pro většinu mnohem snazší než úloha 2. Zřejmě tomu tak bylo díky menšímu počtu možností, což naznačuje i graf číslo 2.

Poslední úlohu nevyřešilo 11 žáků. Z toho o logický způsob se pokoušelo 8 z nich avšak pouze jedinému se to povedlo zcela správně (viz příloha P1.5). Ostatní se ve svých úvahách dopustili drobných chyb. Často si neuvědomili, že každá dvojice si podává ruku pouze jednou (viz příloha P1.6).

Dále jich 15 využilo výčet možností, z nich se pouze 2 dopustili nepozornosti a na některou z dvojic zapomněli, nebo naopak napsali vícekrát.

Pomocí vzorce též neřešil nikdo. O grafické znázornění se pokusil jeden hoch, bohužel si nakreslil příliš nepřehledný obrázek a dopustil se chyby. U 2 žákyň jsem nezaznamenala žádné řešení. To vše ukazuje i tabulka číslo 1.

4.2 Procvičení

Procvičení je prostřední fází našeho experimentu. Navazujeme v něm na poznatky zjištěné v pretestu.

Skládá se ze dvou částí. Po napsání testu je žákům ponecháno jeho zadání, aby se doma mohli zamyslet nad dalšími možnostmi řešení. V příští vyučovací hodině probíhá shrnutí řešení úloh, která žáci využili v pretestu a společně s nimi i ukázky dalších možných postupů vypracování.

Následují ještě ukázky 3 dalších úloh s různými možnostmi dosažení stejného výsledku.

4.2.1 Charakteristika úloh

První tři úlohy jsou do procvičování zařazené proto, aby si žáci uvědomili své chyby v pretestu a představili si další možnosti řešení daných úkolů.

Další mají nastínit nové strategie a přesvědčit žáky o vhodnosti použití různých postupů v odlišných úlohách. Čtvrtá úloha je na výpočet permutací a má ukázat jednoduchost řešení i přes vysoký výsledek. Pátá je zajímavá tím, že musíme zjistit jednotlivé možnosti pro signály s různým počtem znaků a poté je sečíst. Poslední úloha je velice snadná a existuje mnoho řešení, i díky jejímu nízkému výsledku. Na ní jsem chtěla nastínit základní úvahu, která se prolíná většinou kombinatorických úloh. Neměla by pro žáky představovat žádný problém a téměř všichni mají být schopni dojít ke správnému řešení.

4.2.2 Průběh procvičování

Jednu vyučovací hodinu jsme věnovali úlohám z pretestu. Nejprve jsem se žáků zeptala na způsoby řešení úloh, nad nimiž se doma zamýšleli. Ukázali jsme si výpis všech možností, který byl v testu nejpoužívanější. Pak žáci navrhovali další alternativy a napsali jsme si je na tabuli.

Úloha 1

Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvořte všechna možná dvojciferná čísla.
Číslice se v sestavovaném čísle nesmí opakovat.

Nejprve jsme si ukázali řešení **výčtem možností**. Zvolili jsme výpis čísel podle první číslice. To znamená, že na první místo dosadíme každou ze čtyř číslic. Na druhém místě pak u každé z nich obměňujeme ty ostatní. Tento postup se opakuje, dokud na první pozici nevystřídáme všechny zadané číslice.

Rozdělení podle prvních číslic:

12	21	31	41
13	23	32	42
14	24	34	43

Možností je ***12***.

Pak se přihlásili 4 žáci a navrhovali, že úlohu lze řešit ***logickou úvahou***. Jednoho jsem vyvolala a poprosila, aby nám ji předvedl na tabuli. Vysvětlil nám, že má 4 číslice, ze kterých tvoří dvojciferné číslo. Na místo první cifry si může vybrat jednu ze 4 různých možností. Za druhou mu zbývají už pouze 3, neboť jednu z nich již použil a číslice se v číslech nesmí opakovat.

Možností je: $4 \cdot 3 =$ ***12***

Další způsoby žáky nenapadaly, tak jsem jim trošku napověděla. Zeptala jsem se, co kdyby se nám číslice směly opakovat? Kolik možností bychom měli potom? Na to mi odpověděli, že na každou pozici v čísle by mohli vystřídat všechny čtyři dané číslice. Nalezli by tedy takovýchto čísel „$4 \cdot 4 = 16$“. Pak měli za úkol zjistit, kolik máme čísel složených ze dvou stejných číslic. Na to odpověděli „4“. Poté už sami odvodili, že pokud od všech možností odečtou ty s opakujícími se číslicemi, vyjde jim opět „$16 - 4 = 12$“ různých čísel.

Úloha 2

Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvořte všechna možná trojciferná čísla. Číslice se v sestavovaném čísle nesmí opakovat.

U této úlohy si žáci sami všimli, že způsoby jejího řešení budou obdobné, neboť se jedná o shodnou úlohu, pouze s obměněnými hodnotami.

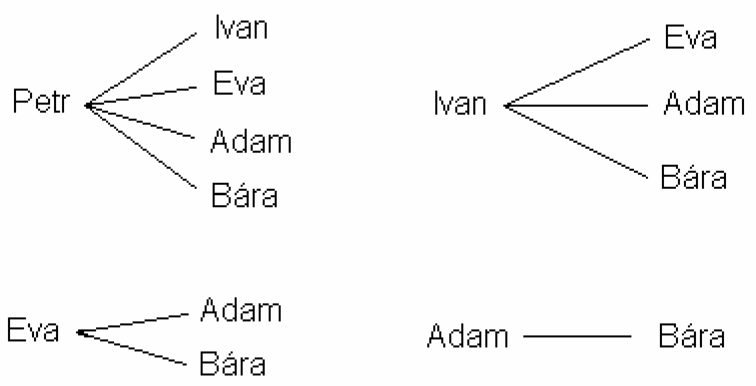
Navrhovali řešení výpisem všech možností a samozřejmě logický způsob, který jsme použili už v předchozím příkladě. Na výpočet u tabule se přihlásili téměř všichni. Vyvolaný žák nám vysvětlil, že má 4 číslice, ze kterých tvoří trojciferné číslo. Na místě první cifry má 4 různé možnosti dosazení. Za druhou mu zbývají už pouze 3, neboť jednu již použil a číslice se v číslech nesmí opakovat. A na třetí místo už zbývají pouze 2 možnosti.

Možností je $4 \cdot 3 \cdot 2 =$ ***24***.

Úloha 3

Sešlo se 5 přátel Petr, Ivan, Eva, Adam, Bára a navzájem si podali ruce. Určete kolik bylo podání rukou.

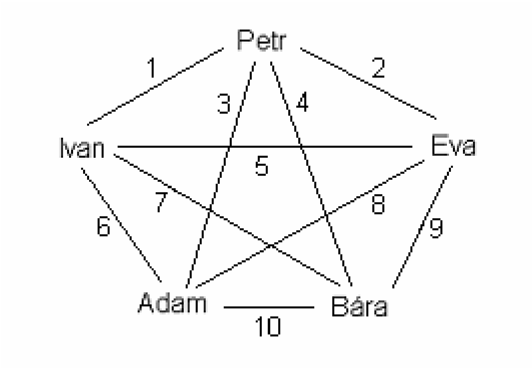
Způsobů řešení této úlohy existuje celá řada. My jsme si nejprve vypsali všechny možnosti pomocí ***logického stromu***.



Možností je $4 + 3 + 2 + 1 =$ ***10***

Poté žáci upozornili na další možnost a to řešení ***logickou úvahou***. Věděla jej více než polovina třídy. Vyvolaná žákyně nám vysvětlila, jak by postupovala. Každý z přátel si může podat ruku s dalšími čtyřmi. Řekla tedy že možností bude $5 \cdot 4 = 20$. Ostatní se ale začali postupně hlásit, že tomu tak není. Museli jí napovědět, že je pro náš počet možností stejné, zda si podá ruku Petr s Ivanem nebo Ivan s Petrem. Dívka si to hned uvědomila a spočtený výsledek ještě vydělila dvěma. Vyšlo tedy $20 : 2 = 10$ podání ruky.

Aby toto žáci lépe pochopili, navrhla jsem možnost si nakreslit obrázek. Vyzkoušeli jsme tak i další způsob a to ***grafický***. Vypsali jsme všechna jména, každá dvě spojili a spočetli počet čar.



Spojnic a tedy i podání rukou bude ***10***.

V další hodině jsme pokračovali ukázkami obdobných příkladů.

Úloha 4

Pětice závodníků Adam, Boris, Cyril, Dušan, Emil běželi závod na 100 m. Kolik je různých pořadí v jakých mohli doběhnout do cíle?

Po přečtení této úlohy žáci opět navrhovali vypsat si všechny možnosti a spočítat je. Vzhledem k omezenému množství času, jsme tuto možnost nepoužili a rovnou si vyzkoušeli ***logický způsob*** řešení.

Vybraný žák nám u tabule navrhl, že když bude místa obsazovat postupně po jednom závodníkovi, na první najde pět možností dosazení. Na druhé má pouze jednoho ze čtyř zbylých, na třetí vybírá dalšího ze tří možných, na čtvrté volí pouze ze dvou a na poslední mu zůstane pouze jeden. Jednotlivé počty spolu vynásobí a dostane výsledek:

$$\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 120.$$

Po spočtení výsledku sami žáci usoudili, že použití výpisu všech možností by bylo velice zdlouhavé a náročné, vzhledem k velkému počtu řešení.

Úloha 5

Kolik znaků, které jsou složeny z jednoho až čtyř signálů, může obsahovat Morseova abeceda?

K řešení této úlohy jsem vyzvala jednoho z žáků, který nebyl příliš aktivní, ale občas se přihlásil. Chtěla jsem ověřit, zda rozumí právě procvičovaným úlohám.

Zeptala jsem se, co ho napadlo po přečtení této úlohy. Po chvilce přemýšlení řekl, že by si vypsal různé možnosti. Vysvětlila jsem, že to je jedna z možností, ale zbytečně zdlouhavá a zda by nepřišel na jinou.

Popřemýšlel a nepříliš jistě řekl, že by spočítal nejprve jednoznakové signály, potom dvouznakové, tříznakové, čtyřznakové zvlášť a nakonec je všechny sečetl. Jednoznakové jsme spočítali společně na tabuli a to tak, že máme na výběr ze dvou znaků, které postupně dosadíme na jedno místo. Aby se do práce více zapojili žáci v lavicích, rozdělila jsem je do třech skupin a každá z nich měla za úkol spočítat jiné signály. První spočetla dvouznakové, další tříznakové a poslední čtyřznakové. Žák u tabule je sečetl: $2 + 4 + 8 + 16 = 30$.

Úloha 6

Na základní škole jsou tři třídy šestého ročníku 6. A, 6. B a 6.C. Jejich žáci se utkají ve vybíjené tak, že hraje každý s každým. Kolik různých zápasů je nutné odehrát?

U této úlohy jsme se také nezdržovali výpisem možností a rovnou jsme se pokusili o řešení ***tabulkou***. Žákyně nám na tabuli do prvního řádku a prvního sloupce vypsala všechny třídy. Pak ji vyplnila, tak aby se v ní každý zápas vyskytoval pouze jedenkrát. Navíc nemůže jeden tým hrát sám proti sobě.

	6. A	6. B	6. C
6. A		X	X
6. B			X
6. C			

Možností je 2 + 1 = ***3.***

Ještě se přihlásil jeden žák a pokusil se o řešení ***logickou úvahou***. Vysvětlil tuto myšlenku: „6. A bude hrát se dvěma družstvy, 6. B už pouze s jedním dalším, neboť jeden zápas má odehrán, vzhledem k tomu, že každá dvojice spolu hraje pouze jednou.

Tedy: 2 + 1 = 3

4.3 Závěrečný test

4.3.1 Charakteristika a zadání závěrečného testu

Tohoto testu se zúčastnilo jen 23 žáků a to 10 dívek a 13 hochů. Byly voleny obdobné úlohy, jako do předchozího testu, aby se zjistilo, zda procvičení a ukázky dalších možností řešení žákům prospěly.

4.3.2 Charakteristika a zadání jednotlivých úloh

Úloha 1

Je úlohou na počet variací s opakováním. Byla úmyslně zvolena s větším počtem možností, aby žáci použili jiná řešení než výpis všech možných kódů.

Zámek kufru je ovládaný nastavením čtyřmístného kódu. Na každém místě může být právě jedno ze 3 písmen A, B, C. Kolik je možností pro zadání kódu?

Úloha 2

Druhá úloha je na počet kombinací bez opakování. U této úlohy lze též nalézt mnoho způsobů, kterými ji lze řešit, na něž mohou žáci snadno přijít. Byla zvolena z důvodu, že při procvičování jsem nezaznamenala žádné větší obtíže s nepochopením zadání ani s hledáním řešení. Jejím zařazením jsem chtěla ověřit, zda použijí různé metody k dosažení správného výsledku.

Fotbalového turnaje se zúčastnilo 6 mužstev: Drnovice, Teplice, Jablonec, Opava, Slávia Praha a Baník Ostrava. Hrálo se systémem každý s každým jeden zápas. Kolik zápasů se odehrálo?

4.3.3 Vzorové řešení úloh

Úloha 1

1. způsob – pomocí vzorce

Variace s opakováním

$V'(k,n) = n^k$ **[kapitola 2.2.3]**

$V'(4,3) = 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

Čtyřprvkových variací s opakování z tříprvkové množiny je ***81***.

2. způsob – výčtem možností

Nejjednodušší a zároveň nejpoužívanější je způsob vypisování po jednotlivých místech kódu od prvního k poslednímu. V tomto případě je ovšem vypisování jednotlivých možností příliš časově náročné a pro žáky je snadné v něm udělat chybu.

Rozdělíme je podle prvních písmen:

AAAA	ABAA	ACAA	BAAA	BBAA	BCAA	CAAA	CBAA	CCAA
AAAB	ABAB	ACAB	BAAB	BBAB	BCAB	CAAB	CBAB	CCAB
AAAC	ABAC	ACAC	BAAC	BBAC	BCAC	CAAC	CBAC	CCAC
AABA	ABBA	ACBA	BABA	BBBA	BCBA	CABA	CBBA	CCBA
AABB	ABBB	ACBB	BABB	BBBB	BCBB	CABB	CBBB	CCBB
AABC	ABBC	ACBC	BABC	BBBC	BCBC	CABC	CBBC	CCBC
AACA	ABCA	ACCA	BACA	BBCA	BCCA	CACA	CBCA	CCCA
AACB	ABCB	ACCB	BACB	BBCB	BCCB	CACB	CBCB	CCCB
AACC	ABCC	ACCC	BACC	BBCC	BCCC	CACC	CBCC	CCCC

Možností je ***81***.

3. způsob – logicky

Tento způsob spočívá v tom, že si žák uvědomí, že má 3 písmena, ze kterých tvoří čtyřmístný kód. Na každé místo tedy dosazuje jedno z nich. Využívá se zde kombinatorického pravidla součinu.

Možností je tedy:

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \boldsymbol{81}$

Úloha 2

1. způsob – pomocí vzorce

Kombinace bez opakování

$$K(k,n) = \frac{V(k,n)}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$ **[viz kapitola 2.2.5]**

$$K(2,6) = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{30}{2} = 15$$

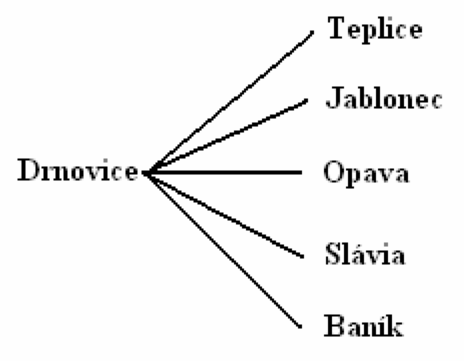
Dvouprvkových kombinací bez opakování z šestiprvkové množiny je ***15***.

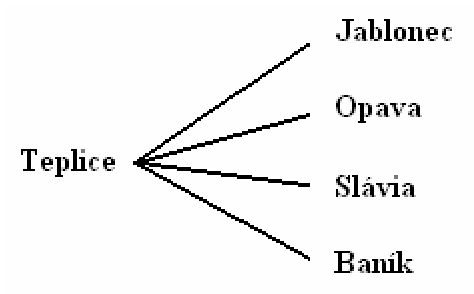
2. způsob – výčtem možností

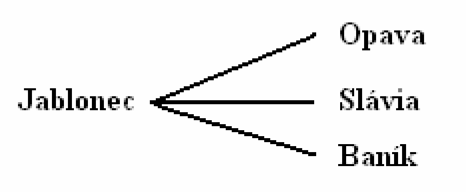
Drnovice	—	Teplice	Teplice	—	Jablonec	Jablonec	—	Opava
Drnovice	—	Jablonec	Teplice	—	Opava	Jablonec	—	Slávia
Drnovice	—	Opava	Teplice	—	Slávia	Jablonec	—	Baník
Drnovice	—	Slávia	Teplice	—	Baník			
Drnovice	—	Baník						

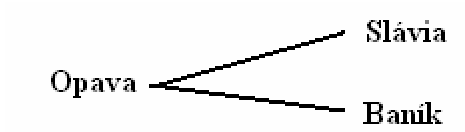
Opava	—	Slávia	Slávia	—	Baník
Opava	—	Baník			

3. způsob – logický strom možností

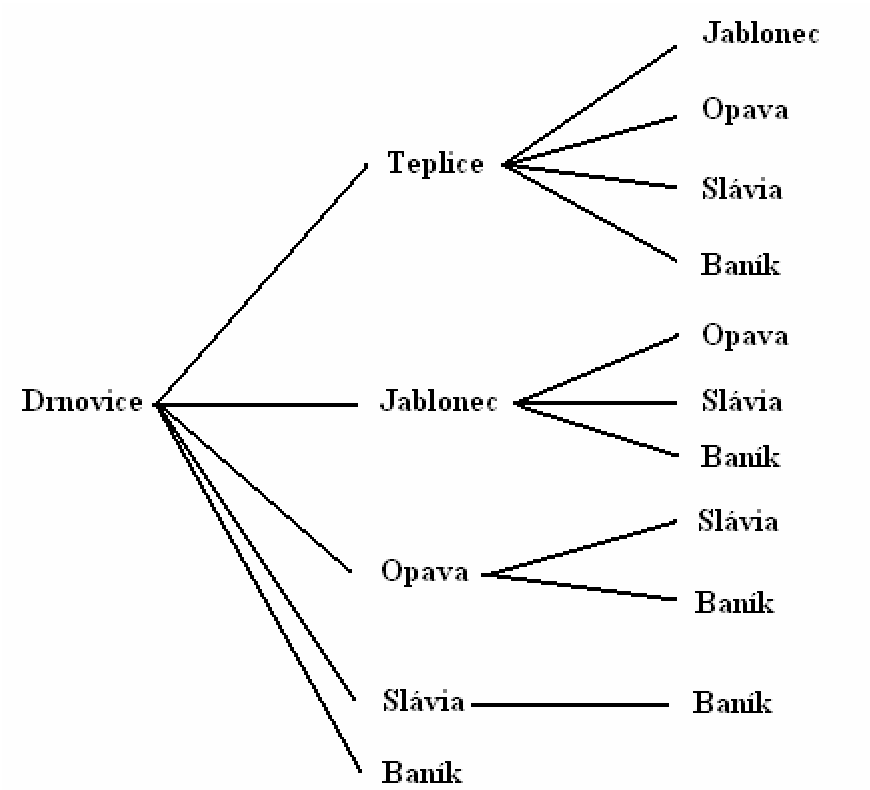








nebo



Možností je 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = ***15.***

4. způsob – logicky

Je šest mužstev, takže každý hraje s 5 dalšími. Musíme ale uvážit, že každá dvojice spolu hraje pouze jednou.

Tedy:

$(6 \cdot 5) : 2 = 30 : 2 =$ ***15***

5. způsob –tabulka

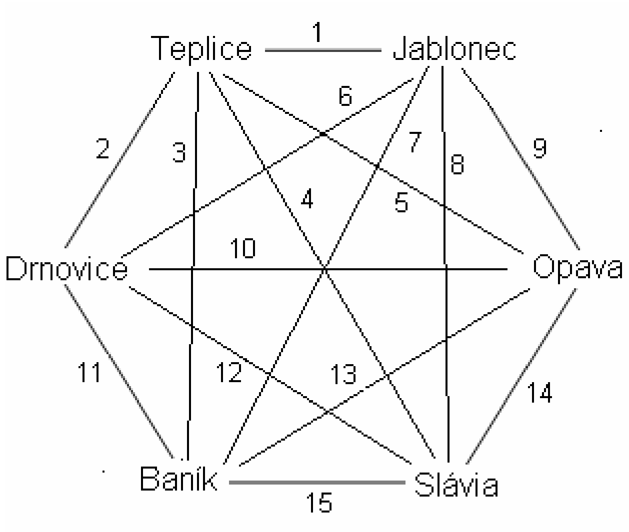
Do řádků a sloupců zapíšeme názvy týmů a vyplňujeme, tak aby se v ní každý zápas vyskytoval pouze jedenkrát. Navíc musí proti sobě hrát různé týmy.

	Drnovice	Teplice	Jablonec	Opava	Slávia	Baník
Drnovice						
Teplice	X					
Jablonec	X	X				
Opava	X	X	X			
Slávia	X	X	X	X		
Baník	X	X	X	X	X	

Možností je 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = ***15.***

6. způsob – graficky

Graf utvoříme tak, že si vypíšeme jednotlivé týmy, což jsou uzly a pak každou dvojici spojíme hranou. K těmto hranám postupně připisujeme čísla tak, aby u každé bylo pouze jedno a takto je spočítáme.



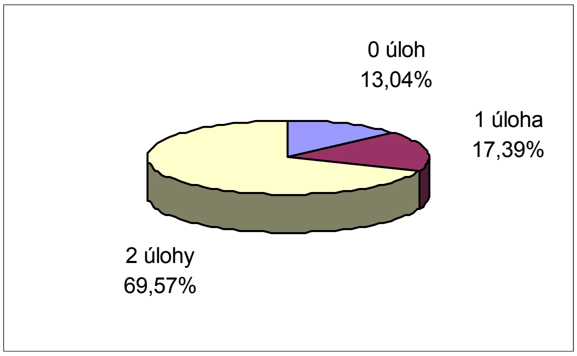
Sečtením všech spojnic zjistíme, že možností je ***15***.

4.3.4 Vyhodnocení závěrečného testu

Celkové vyhodnocení

Úspěšnost tohoto testu byla ještě vyšší než u pretestu. Ze 23 žáků jich 86,96% vyřešilo alespoň polovinu.

Graf č. 3: Počet vyřešených úloh závěrečného testu (v %)



Celý správně ho vyřešilo 16 žáků a pouze 3 chlapci nedosáhli žádného správného výsledku (viz příloha P2.1). Jinak ostatním se podařilo spočítat alespoň jednu z obou úloh. Z toho u 2 to bylo nepřehledností v postupu a u 1 opakováním stejných zápasů, čímž došel k dvojnásobnému výsledku.

Z vyhodnocení tohoto testu se dá usuzovat, že jsme učivo procvičovali. I přesto, že část žáků postupovala starými ověřenými způsoby, bylo zřejmé, že žáky návrhy dalších možných řešení zaujaly a někteří se je snažili využít.

Tab. č. 3: Použité metody řešení v jednotlivých úlohách závěrečného testu

	metoda	*správně*	*špatně*	*celkem*
1. úloha	***výčet***	2	3	5
	logicky	14	4	18
2. úloha	**výčet**	5	0	5
	logická úvaha	9	2	11
	tabulka	5	0	5
	graficky	1	1	2

Ani v tomto testu nemohla být použita metoda řešení pomocí obecných kombinatorických vzorců, neboť příslušné vztahy si žáci dosud neosvojili a nepouštěli se tedy do jejich užití.

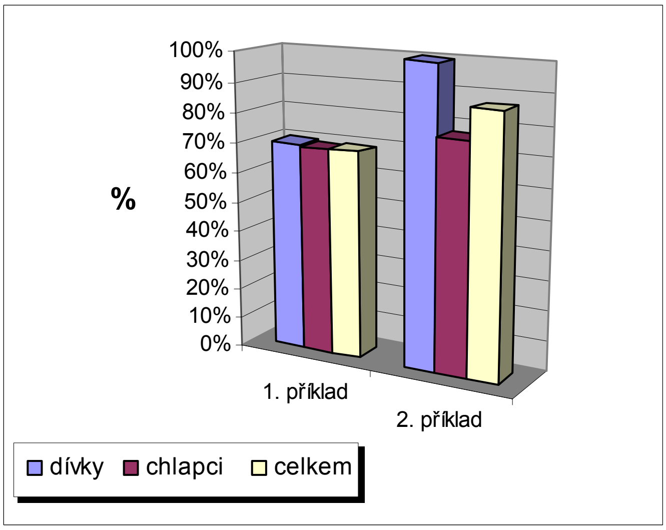
V obou úlohách žáci používali nejvíce logického způsobu řešení. U druhé se vyskytly čtyři různé metody. Pozornost zde věnovali vedle logické úvahy i výpisu všech možností a srovnání do tabulky, což se všem podařilo správně. O grafické řešení se pokusil pouze jediný žák, bohužel neúspěšně, neboť jeho graf byl velice nepřehledný a napočetl o jednu hranu více (viz příloha P2.2).

Tab. č. 4: Úspěšnost řešení žáků v jednotlivých příkladech závěrečného testu (v %)

	dívky	chlapci	celkem
1. příklad	70%	69,20%	69,60%
2. příklad	100%	76,90%	87%

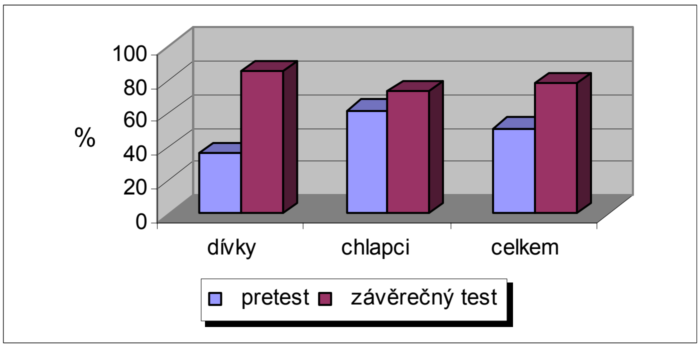
Celková úspěšnost závěrečného testu se zvýšila o 27 % na 78,3 %. Zřejmé je především zlepšení u děvčat, ta se svou úspěšností tentokrát téměř vyrovnala chlapcům. Bylo tomu hlavně proto, že dívky již neměly problémy s hledáním řešení (viz příloha P2.3) a u chlapců se opět projevila jejich nepozornost a nepřehlednost ve vypracovávání daných úkolů (viz příloh P2.1).

Graf č. 4: Počet vyřešených úloh u jednotlivých příkladů závěrečného testu (v %)



Porovnáním počtu úspěšných řešitelů v jednotlivých příkladech si můžeme všimnout větší úspěšnosti ve 2. úloze a to díky dívkám, které v ní dosáhly 100%. V 1. úloze byly výsledky téměř totožné u chlapců i děvčat. Celkově v tomto testu lépe uspěly dívky.

Graf č. 5: Porovnání úspěšnosti obou testu (v %)



Celkové výsledky v závěrečném testu se zlepšili díky zvýšení úspěšnosti jednotlivých skupin. Dopadl tedy lépe, což potvrdilo naše očekávání a ověřilo naši hypotézu, že systematickým procvičováním počet správných řešení vzroste.

Vzhledem k tomu, že v každém z testů byly použity odlišné příklady, nelze přímo porovnat úspěšnosti mezi konkrétními úlohami.

Úloha 1

Obzvláště u této úlohy mne zajímalo, jak se s ní žáci vypořádají, vzhledem k pro ně téměř nemožnému použití výpisu všech možností řešení. Většina z nich to poznala rychle a tak se snažila hledat jiné varianty (viz příloha P2.3).

Logicky tuto úlohu řešilo 18 žáků, z toho 14 úspěšně. U 2 z nich se vyskytly drobné chyby při počítání a 2 žáci neuvažovali nad možností s více stejnými písmeny.

Zbývajících 5 žáků se pokoušelo použít metodu výpisu všech možností, ale pro velký počet řešení se to nikomu nepodařilo dokončit.

Úloha 2

Zde 11 žáků využilo logického způsobu řešení, z toho 2 si neuvědomili, že každá dvě mužstva spolu hrají pouze jediný zápas (viz příloha P2.1). Ostatní postupovali správně.

Výčtem všech možností úlohu řešilo 5 žáků a všichni zcela správně.
Dalších 5 využilo řešení pomocí tabulky a také zde se nikdo nespletl (viz příloha P2.4). Dokonce se 2 žáci pokusili o grafické řešeni, bohužel 1 z nich udělal chybu v počítání hran (viz příloha P2.2).

5. Ověření hypotéz

5.1 Hypotéza 1

Hypotéza zněla:

Úspěšnost řešení je do jisté míry ovlivněna srozumitelností textu úlohy a jeho správným porozuměním. Lze očekávat obtíže u 1. úlohy, kde žáci mohou nepozorně, nebo ne zcela dočíst zadání. Úloha se tím stane obtížnější, což se může odrazit v úspěšnosti řešení.

Tuto hypotézu se podařilo ověřit, na což ukazuje graf číslo 5. Z vypracovaných testů 1. úlohy bylo u 3 žáků zřejmé, že si text důkladně nedočetli do konce, nebo se přehlédli, což mělo vliv na úspěšné vyřešení úkolu. Hledali různá řešení včetně těch, ve kterých se číslice opakovaly (viz příloha P1.5).

5.2 Hypotéza 2

Hypotéza zněla:

Systematické procvičování obdobných úloh vede k rozvoji a využívání dalších možných řešitelských strategií. Dá se předpokládat, že po procvičení obdobných úloh se výsledky druhého testu zlepší a žáci zde využijí dalších možných strategií řešení.

Tato hypotéza se nám potvrdila. Ukázalo se, že systematické procvičení nových metod řešení zvýšilo úspěšnost žákovských řešení. Po procvičení veškerých úloh z pretestu a dalších obdobných úloh se výsledky druhého testu zlepšily. Vedle výpisu všech možností zde žáci využili i více různých postupů řešení (viz příloha P2.3).

6. Soubor úloh

6.1 Charakteristika souboru úloh

V následující části je uveden soubor základních kombinatorických úloh s různými možnostmi řešitelských strategií. Pro řešení každé z nich lze použít více způsobů. Pro jejich velké množství je nebudeme uvádět všechny, ale ukážeme si u každé úlohy pouze dva. První metodu řešení pomocí obecných kombinatorických vzorců a ještě jednu další, která je vhodná i pro žáky, kteří se s těmito úlohami setkávají poprvé.

Soubor úloh nepovažujeme za uzavřený. Je zde ponechán prostor pro další tvorbu úloh. Jsou rozděleny podle obecných vzorců, kterými je lze počítat.

Kombinace

Z prvků dané množiny sestavujeme skupiny, aniž by nás zajímalo uspořádání prvků v nich. Nezáleží nám tedy na pořadí prvků uvnitř skupiny. Dvě skupiny považujeme za různé, liší-li se navzájem alespoň v jednom prvku. Potom ještě rozlišujeme, zda se prvky ve skupinách mohou opakovat či nikoli.

Variace

Z prvků dané množiny sestavujeme skupiny (tzv. k-tice), kde záleží na uspořádání prvků v nich. Důležité je tedy pořadí prvků uvnitř skupiny. Dvě skupiny považujeme za různé, liší-li se navzájem pořadím prvků. Potom ještě rozlišujeme, zda se prvky ve skupinách mohou opakovat či nikoli.

Permutace

Jsou speciálním případem variací. Z prvků dané množiny sestavujeme skupiny všech prvků (tzv. n-tice), kde záleží na uspořádání prvků. Důležité tedy je pořadí prvků uvnitř skupiny. Dvě skupiny považujeme za různé, liší-li se navzájem pouze pořadím prvků. Potom ještě rozlišujeme, zda se prvky ve skupinách mohou opakovat či nikoli.

6.2 Charakteristika a zadání jednotlivých úloh

Úloha 1

Jedná se o úlohu na výpočet dvouprvkových variací bez opakování ze čtyřprvkové množiny.

Máme k dispozici čtyřprvkovou množinu a vybíráme z ní dvouprvkové skupiny v nichž záleží na pořadí a prvky se v nich nesmí opakovat, protože žádná z osob nemůže sedět na dvou židlích současně.

Zadání:

Kolika způsoby lze vybrat dvě ze čtyř osob a posadit je na dvě židle?

Úloha 2

Jedná se o úlohu na výpočet tříprvkových variací bez opakování z dvacetišestiprvkové množiny.

Z dvacetišestiprvkové množiny vybíráme tříprvkové skupiny v nichž záleží na pořadí a prvky se v nich nesmí opakovat, protože žádná z dívek se nemůže umístit na dvou místech současně.

Zadání:

Kolika různými způsoby může skončit soutěž Miss, když se do ní přihlásilo 26 dívek a z nich se určí první, druhá a třetí?

Úloha 3

Jedná se o úlohu na výpočet čtyřprvkových variací s opakování z tříprvkové množiny.

Z tříprvkové množiny tvoříme čtyřprvkové skupiny v nichž záleží na pořadí a prvky se v nich smí opakovat, protože v kódu mohou být písmena na více místech současně.

Zadání:

Zámek kufru je ovládaný nastavením čtyřmístného kódu. Na každém místě může být právě jedno ze 3 písmen A, B, C. Kolik je možností pro zadání kódu?

Úloha 4

Jedná se o úlohu na výpočet jedno, dvou, tří a čtyřprvkových variací s opakování z dvouprvkové množiny. Pro výpočet zde využijeme kombinatorické pravidlo součtu, což znamená, že počty jednotlivých variací sečteme.

Z dvouprvkové množiny (skládající se z možných signálů - tečky a čářky) tvoříme postupně jedno, dvou, tří a čtyřprvkové skupiny v nichž záleží na pořadí a prvky se v nich smějí opakovat, protože v jednom kódu může být více stejných signálů.

Zadání:

Kolik znaků, které jsou složeny z jednoho až čtyř signálů, může obsahovat Morseova abeceda?

Úloha 5

Jedná se o úlohu na výpočet pětiprvkových variací bez opakování z pětiprvkové množiny, resp. pětiprvkových permutací bez opakování.

Z pětiprvkové množiny tvoříme postupně skupiny všech prvků lišící se pouze jejich pořadím a prvky se v nich nemohou opakovat, protože každý závodník mohl doběhnout do cíle pouze jednou.

Zadání:

Pětice závodníků Adam, Boris, Cyril, Dušan, Emil běželi závod na 100 m. Kolik je různých pořadí v jakých mohli doběhnout do cíle?

Úloha 6

Jedná se o úlohu na výpočet třicetipětiprvkových variací bez opakování z třicetipětiprvkové množiny, resp. třicetipětiprvkových permutací bez opakování

Ze třicetipětiprvkové množiny tvoříme postupně skupiny všech prvků lišící se pouze pořadím a prvky se v nich nemohou opakovat, protože každý cestující obsadí právě jedno sedadlo.

Zadání:

Kolika různými způsoby se může 35 cestujících posadit v autobuse, kde je 35 míst.

Úloha 7

Jedná se o úlohu na výpočet dvouprvkových kombinací bez opakování z pětiprvkové množiny.

Z pětiprvkové množiny vybíráme dvouprvkové skupiny v nichž nezáleží na pořadí a prvky se v nich nesmí opakovat, protože žáci si nebudou podávat ruku sami se sebou.

Zadání:

Sešlo se 5 přátel Petr, Ivan, Eva, Adam, Bára a navzájem si podali ruce. Určete kolik bylo podání rukou.

Úloha 8

Jedná se o úlohu na výpočet čtyřprvkových kombinací bez opakování z desetiprvkové množiny.

Z desetiprvkové množiny vybíráme čtyřprvkové skupiny v nichž nezáleží na pořadí a prvky se v nich nemohou opakovat, protože každé družstvo se může účastnit pouze jednou.

Zadání:

Na turnaj ve stolním tenisu se přihlásilo 10 družstev. Do semifinále postupují 4 nejlepší. Kolik je různých čtveřic družstev, které se mohou střetnout v semifinále?

Úloha 9

Jedná se o úlohu na výpočet čtyřprvkových kombinací s opakováním ze tříprvkové množiny.

Z tříprvkové množiny tvoříme čtyřprvkové skupiny v nichž nezáleží na pořadí a prvky se v nich mohou opakovat, protože od každého druhu sirupu si lze zvolit libovolné množství.

Zadání:

V obchodě mají tři druhy sirupu: jahodový, malinový a pomerančový. Určete počet všech možností nákupu čtyř lahví sirupu v obchodě.

Úloha 10

Jedná se o úlohu na výpočet tříprvkových kombinací s opakováním ze čtyřprvkové množiny a výpočet tříprvkových kombinací s opakováním z dvouprvkové množiny.

Pro výpočet zde využijeme kombinatorické pravidlo součinu, což znamená, že počet tříprvkových kombinací s opakováním ze čtyřprvkové množiny vynásobíme počtem tříprvkových kombinací s opakováním z dvouprvkové množiny.

Ze čtyřprvkové množiny tvoříme tříprvkové skupiny v nichž nezáleží na pořadí a prvky se v nich mohou opakovat, protože od každého druhu pohledu si lze zvolit libovolné množství.

Dále máme dvouprvkovou množinu a tvoříme z ní tříprvkové skupiny v nichž nezáleží na pořadí a prvky se v nich mohou opakovat, protože od každého druhu známky si lze zvolit libovolné množství. Tyto dílčí výpočty spolu nakonec vynásobíme.

<u>Zadání:</u>

V prodejně mají čtyři druhy pohlednic a dva druhy známek odpovídající hodnoty. Kolika různými způsoby lze koupit tři pohlednice se známkami?

6.3 Řešení úloh

Úloha 1

Kolika způsoby lze vybrat dvě ze čtyř osob a posadit je na dvě židle?

Řešení:

1. způsob – pomocí vzorce

Dvouprvkové variace bez opakování ze čtyřprvkové množiny.

$$V(2,4) = \frac{4!}{(4-2)!} = 4 \cdot 3 = 12 .$$ **[kapitola 2.2.3]**

2. způsob – logicky

Představme si, že osoby budeme posazovat na místa postupně po jedné. Na první posadíme jednu ze čtyř osob. Jestliže ji obsadí, na druhou už lze usadit jen jednu ze třech zbývajících. Výsledek získáme součinem těchto dvou čísel, tzn. počtů možností na každém místě.

$$\underline{\ \ }\ \ \underline{\ \ }$$
$$4 \cdot 3 = 12.$$

Úloha 2

Kolika různými způsoby může skončit soutěž Miss, když se do ní přihlásilo 26 dívek a z nich se určí první, druhá a třetí?

Řešení:

1. způsob – pomocí vzorce

Tříprvkové variace bez opakování z dvacetišestiprvkové množiny.

$$V(3,26) = \frac{26!}{(26-3)!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600 .$$ **[kapitola 2.2.3]**

2. způsob – logicky

Zamyslíme-li se nad touto úlohou, přijdeme na to, že její řešení lze snadno logicky odvodit.

Představme si, že dívkami budeme obsazovat místa postupně po jednom. První může obsadit jedna z dvacetišesti dívek. Jestliže jej obsadí, druhé už může obsadit jen jedna z dvacetipěti dalších. Na třetím může být jedna ze zbývajících dvacetičtyř. Výsledek získáme součinem těchto tří čísel, tzn. počtů možností na každém místě.

$\overline{}\ \overline{}\ \overline{}$

26 · 25 · 24 = 15 600.

Úloha 3

Zámek kufru je ovládaný nastavením čtyřmístného kódu. Na každém místě může být právě jedno ze 3 písmen A, B, C. Kolik je možností pro zadání kódu?

Řešení:

1. způsob – pomocí vzorce

Čtyřprvkové variace s opakování z tříprvkové množiny.

$$V'(k,n) = n^k \quad \textbf{[kapitola 2.2.3]}$$

$$V'(4,3) = 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

Čtyřprvkových variací s opakování z tříprvkové množiny je ***81***.

2. způsob – výčtem možností

Nejjednodušší a zároveň nejpoužívanější je způsob vypisování po jednotlivých místech kódu od prvního k poslednímu. V tomto případě je ovšem vypisování jednotlivých možností příliš časově náročné a pro žáky je snadné v něm udělat chybu.

Rozdělíme je podle prvních písmen:

AAAA	ABAA	ACAA	BAAA	BBAA	BCAA	CAAA	CBAA	CCAA
AAAB	ABAB	ACAB	BAAB	BBAB	BCAB	CAAB	CBAB	CCAB
AAAC	ABAC	ACAC	BAAC	BBAC	BCAC	CAAC	CBAC	CCAC
AABA	ABBA	ACBA	BABA	BBBA	BCBA	CABA	CBBA	CCBA
AABB	ABBB	ACBB	BABB	BBBB	BCBB	CABB	CBBB	CCBB
AABC	ABBC	ACBC	BABC	BBBC	BCBC	CABC	CBBC	CCBC
AACA	ABCA	ACCA	BACA	BBCA	BCCA	CACA	CBCA	CCCA
AACB	ABCB	ACCB	BACB	BBCB	BCCB	CACB	CBCB	CCCB
AACC	ABCC	ACCC	BACC	BBCC	BCCC	CACC	CBCC	CCCC

Možností je ***81***.

Poznámka:

Úloha je použita v závěrečném testu.

Úloha 4

Kolik znaků, které jsou složeny z jednoho až čtyř signálů, může obsahovat Morseova abeceda?

Řešení:

1. způsob – pomocí vzorce

Jedno, dvou, tří a čtyřprvkové variace s opakováním z dvouprvkové množiny skládající se z „•“ a „–“.

K výpočtu musíme ještě použít kombinatorické pravidlo součtu.

$$V'(1,2) = 2^1 = 2$$
$$V'(2,2) = 2^2 = 4$$
$$V'(3,2) = 2^3 = 8$$
$$V'(4,2) = 2^4 = 16$$

$V'(1,2) + V'(2,2) + V'(3,2) + V'(4,2) = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$ **[kapitola 2.2.3]**

2. způsob – výčtem možností

Tato úloha je snadno řešitelná výpisem všech možností. Postupně si vypíšeme znaky skládající se z jednoho, dvou, tří a čtyř signálů. Výsledkem bude součet všech signálů.

Jednoznakové signály:

• | − = 2

Dvouznakové signály:

•• | •− | −• | −− = 4

Tříznakové signály:

••• | ••− | •−•| •−− | −−• | −−− | −•• | −•− = 8

Čtyřznakové signály:

•••• | •••− | ••−• | ••−− | •−−• |•−−−| •−••| •−•−
−−−−|−−−•|−−•−|−−••|−•−−|−•−•|−•••|−••−
= 16

Celkem: $2 + 4 + 8 + 16 = 30$

Úloha 5

Pětice závodníků Adam, Boris, Cyril, Dušan, Emil běželi závod na 100 m. Kolik je různých pořadí v jakých mohli doběhnout do cíle?

Řešení:

1. způsob – pomocí vzorce

Pětiprvkové variace bez opakování z pětiprvkové množiny, resp. pětiprvkové permutace bez opakování.

$$P(5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120\,.$$ **[kapitola 2.2.4]**

2. způsob – logicky

Představme si, že závodníky budeme obsazovat místa postupně po jednom. První může obsadit jeden z pěti chlapců. Jestliže jej obsadí, druhé už může obsadit jen jeden ze čtyř dalších. Na třetím může být jeden ze tří, na čtvrtém další ze zbývajících dvou a na páté už zbude jen poslední jeden. Výsledek získáme součinem těchto pěti čísel, tzn. počtů možností na každém místě.

— — — — —

5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 120.

Úloha 6

Kolika různými způsoby se může 35 cestujících posadit v autobuse, kde je 35 míst.

Řešení:

1. způsob – pomocí vzorce

Třicetipětiprvkové variace bez opakování z třicetipětiprvkové množiny, resp. třicetipětiprvkové permutace bez opakování.

$P(35) = 35! = 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. **[kapitola 2.2.4]**

2. způsob – logicky

Představme si, že cestujícími budeme obsazovat místa postupně po jednom. První může obsadit jeden z třicetipěti cestujících. Jestliže jej obsadí, druhé už může obsadit jen jeden ze třicetičtyř dalších. Na třetím může být jeden ze třicetitří, na čtvrtém další ze zbývajících třicetidvou atd. Postupně takhle budeme obsazovat až do posledního místa na které už zůstane pouze poslední cestující. Výsledek získáme součinem těchto třicetipěti čísel, tzn. počtů možností na každém místě.

— — — .... — —

35 · 34 · 33 · ……………………………………... · 2 · 1 = 35!.

Úloha 7

Sešlo se 5 přátel Petr, Ivan, Eva, Adam, Bára a navzájem si podali ruce. Určete kolik bylo podání rukou.

Řešení:

1. způsob – pomocí vzorce

Dvouprvkové kombinace bez opakování z pětiprvkové množiny.

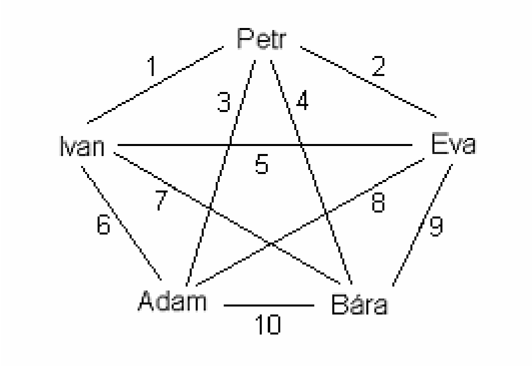
$$K(k,n) = \frac{V(k,n)}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$ **[kapitola 2.2.5]**

$$K(2,5) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{20}{2} = 10$$

Dvouprvkových kombinací bez opakování z pětiprvkové množiny je ***10***.

2. způsob – graficky

Vypíšeme jednotlivé přátele, což jsou uzly a pak každou dvojici spojíme hranou, vznikne tím graf. K těmto hranám postupně připisujeme čísla, aby u každé bylo pouze jedno a takto je spočítáme.



Sečtením všech spojnic zjistíme, že možností je ***10***.

Poznámka:

Úloha je použita v pretestu.

Úloha 8

Na turnaj ve stolním tenisu se přihlásilo 10 družstev. Do semifinále postupují 4 nejlepší. Kolik je různých čtveřic družstev, které se mohou střetnout v semifinále?

Řešení:

1. způsob – pomocí vzorce

Čtyřprvkové kombinace bez opakování z desetiprvkové množiny.

$$K(4,10) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = 210$$ **[kapitola 2.2.5]**

2. způsob – logicky

Zamyslíme-li se nad touto úlohou, přijdeme na to, že její řešení lze též logicky odvodit.

Představme si, že družstva budou obsazovat místa postupně po jednom. První může obsadit jedno z deseti družstev. Jestliže jej obsadí, druhé už může obsadit jen jedno z devíti družstev. Na třetí lze dosadit jedno z osmi a na čtvrté už pouze jedno ze sedmi družstev. Součinem těchto čtyř čísel získáme první mezivýsledek.

Musíme si ale uvědomit, že pro nás není důležité pořadí družstev a za různé považujeme takové čtveřice, ve kterých je alespoň jedno družstvo jiné. Zjistíme ještě kolik bude čtveřic, které se budou lišit pouze pořadím prvků v nich. Jejich počtem pak musíme první mezivýsledek vydělit.

Získáme ho opět součinem čtveřice čísel. Můžeme dosazovat postupně na první místo čtyři různá možná družstva, na druhé zbývají tři, na třetí pouze dvě a na poslední už jen jedno.

$$(\overline{10} \cdot \overline{9} \cdot \overline{8} \cdot \overline{7}) \quad : \quad (\overline{4} \cdot \overline{3} \cdot \overline{2} \cdot \overline{1}) = 5040 : 24 = 210$$

Úloha 9

V obchodě mají tři druhy sirupu: jahodový, malinový a pomerančový. Určete počet všech možností nákupu čtyř lahví sirupu v obchodě.

Řešení:

1. způsob – pomocí vzorce

Čtyřprvkové kombinací s opakováním ze tříprvkové množiny.

$$K'(4,3) = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15 \text{ } \textbf{[kapitola 2.2.5]}$$

2. způsob – výčtem možností

Tato úloha je další z těch, které lze snadno řešit výpisem možností a navíc se nabízí více různých postupů vypisování.

Máme tři druhy sirupů a představíme si tři skupiny, do nichž budeme přidělovat počet lahví každého druhu. Každá trojice čísel tedy znamená počet lahví jahodového, malinového a na posledním místě pomerančového sirupu.

Řešení ukazuje, že nejprve nalezneme různé trojice, do nichž lze rozdělit skupinu čtyř lahví. Pak jednotlivé z nich budeme obměňovat a hledat řešení pro různé příchutě. Nakonec všechny možnosti sečteme a zjistíme výsledek.

4 = 4 + 0 + 0 = 3 + 1 + 0 = 2 + 2 + 0 = 2 + 1 + 1

4 0 0	3 1 0	1 0 3	2 2 0	2 1 1
0 4 0	3 0 1	0 1 3	2 0 2	1 2 1
0 0 4	1 3 0	0 3 1	0 2 2	1 1 2

Celkem: 3 + 6 + 3 + 3 = 15

Úloha 10

V prodejně mají čtyři druhy pohlednic a dva druhy známek odpovídající hodnoty. Kolika různými způsoby lze koupit tři pohlednice se známkami?

Řešení:

1. způsob – pomocí vzorce

Tříprvkové kombinace s opakováním ze čtyřprvkové množiny a tříprvkové kombinace s opakováním z dvouprvkové množiny.

K výpočtu musíme ještě použít kombinatorické pravidlo součinu.

$$K'(3,4) = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

$$K'(3,2) = \binom{2+3-1}{3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

$K'(3,4) \cdot K'(3,2) = 20 \cdot 4 = 80$ **[kapitola 2.2.5]**

2. způsob – výčtem možností

I pro tuto úlohu je možné použít řešení pomocí částečného výpisu možností.

Rozdělíme si ji na dvě části v první budeme hledat možnosti jak vybrat pohlednice a ve druhé známky. Jednotlivé počty možných výběrů pohlednic a známek spolu nakonec vynásobíme

Vzhledem k tomu, že v první části máme čtyři druhy pohlednic, představíme si čtyři skupiny, do nichž budeme přidělovat počet od každého druhu a to tak, aby součet vybraných pohlednic byl roven třem. Každá čtveřice čísel tedy znamená počet pohlednic prvního, druhého, třetího a na posledním místě čtvrtého druhu.

Řešení ukazuje, že nejprve nalezneme různé čtveřice, do nichž lze rozdělit skupinu tří pohlednic. Pak jednotlivé z nich budeme obměňovat a hledat řešení pro různé druhy. Nakonec všechny možnosti sečteme a zjistíme výsledek.

3 = 3 + 0 + 0 + 0 = 2 + 1 + 0 + 0 = 1 + 1 + 1 + 0

3 0 0 0	2 1 0 0	0 1 2 0	1 1 1 0
0 3 0 0	2 0 1 0	0 1 0 2	1 1 0 1
0 0 3 0	2 0 0 1	0 2 1 0	1 0 1 1
0 0 0 3	1 2 0 0	0 2 0 1	0 1 1 1
1 0 2 0	0 0 1 2		
1 0 0 2	0 0 2 1		

Celkem: 4 + 6 + 6 + 4 = 20

Ve druhé části máme dva druhy známek, představíme si dvě skupiny, do nichž budeme přidělovat počet od každého druhu a to tak, aby součet vybraných známek byl roven třem. Každá dvojice čísel tedy znamená počet známek prvního a druhého druhu.

Řešení ukazuje, že nejprve nalezneme různé dvojice, do nichž lze rozdělit skupinu tří známek. Pak jednotlivé z nich budeme obměňovat a hledat řešení pro různé druhy. Nakonec všechny možnosti sečteme a zjistíme výsledek.

3 = 3 + 0 = 2 + 1

3 0	2 1
0 3	1 2

Celkem: 2 + 2 = 4

Nakonec spolu musíme vynásobit počet možností výběru pohlednic se všemi možnými výběry známek.

$20 \cdot 4 = 80$

7. Závěr

Cílem práce bylo vypracování souboru generovaných problémů s gradovanou obtížností a uvedení různých metod řešení zadaných problémů. Nedílnou součástí byla realizace zadání úloh z tohoto souboru na druhém stupni základní školy a vyhodnocení žákovských metod řešení. Vzhledem k tomu, že kombinatorika není součástí výuky všech základních škol, byla zvolena ZŠ s rozšířenou výukou matematických a přírodovědných předmětů. Zde totiž patří mezi probírané učivo. V praktické části je výchozím bodem pretest s nímž později porovnáváme výsledky závěrečného testu. Úkolem tohoto porovnání bylo ověřit změny v použití různých metod a dosažení odlišné úspěšnosti před systematickým procvičením a po něm. Část pozornosti je věnována využití kombinatoriky v praxi.

Přínosem různých metod řešení úloh z tohoto souboru je zejména rozvoj logického myšlení, obecných kombinačních schopností a v neposlední řadě také navazující pochopení problematiky pravděpodobnosti.

Zaměřením se na kombinatorické úlohy jsem získala větší přehled o logických úvahách žáků, jejich promítnutí se do dalšího rozvoje myšlení a schopností. To je pro mě jako budoucí učitelku velkým přínosem a také vzorem k využití obdobných úloh.

Závěrem práce není uzavřený soubor úloh, které jsou bezpodmínečně nutné ke správnému rozvoji logického myšlení a schopností žáků, ale pouze nastínění některých užitečných metod řešení, využitelných v různých odvětvích matematiky a nejen tam. Tato ukázka může posloužit jak začínajícím učitelům, tak i jejich zkušeným kolegům, kteří již mají své osvědčené úlohy. Stejně vhodné, či vhodnější mohou být obdobné, nebo zcela odlišné úlohy, které zde obsaženy nejsou, avšak u procvičení těchto úloh jsme pozorovali kladný vliv na žákovská řešení.

Seznam použité literatury

[1] **Bobok J., Koman M.:** *Matematika pro 6. ročník ZŠ, 1. díl – Doplňující text pro třídy s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů.* 1. vydání Praha: SPN, 1984. 156 s.
ISBN 14- 616-84

[2] **Hecht T., Bero P., Černek P.:** *Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ: Kombinatorika.* 1. vydání Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 1996. 33 s.
ISBN 80-7158-138-0

[3] **Koucký M., Zelinka B.:** *Diskrétní matematika, 1. díl.* 1. vydání Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2003. 90 s.
ISBN 80- 7083-715-2

[4] **Polák J.:** *Přehled středoškolské matematiky*. 6. vydání Praha: nakladatelství Prométheus, s. r. o., 1998. 608 s.
ISBN 80-85849-78-X

[5] **Smida J.:** *Matematika pro II. Ročník gymnázií – Kombinatorika.* 1. vydání Praha: SPN, 1989. 98 s.
ISBN 14-517-89

[6] **Šindelář K.:** *Matematika pro učitele základních škol, II. Díl.* 1. vydání Praha: SPN, 1981. 191 s.
ISBN 14-602-81

[7] **Vilenkin N. J.:** *Kombinatorika.* 2. vydání Brno - Moskva: SNTL v koedici s nakladatelstvím MIR, 1977. 300 s. ISBN 04-001-77

[8] **Vrba A.:** *Kombinatorika*. 1. vydání Praha: Mladá fronta, 1980. 130 s.
ISBN 23-034-80

[9] *Vzdělávací program Základní škola*. Platnost od 1. 9. 1996. s. 280.
ISBN 80-7168-337-X

PŘÍLOHY

P1. Ukázky žákovských řešení - pretest

P1.1 Zadání pretestu

Úloha 1

Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvořte všechna možná dvojciferná čísla. Číslice se v sestavovaném čísle nesmí opakovat.

Úloha 2

Z číslic 1, 2, 3, 4 vytvořte všechna možná trojciferná čísla. Číslice se v sestavovaném čísle nesmí opakovat.

Úloha 3

Sešlo se 5 přátel Petr, Ivan, Eva, Adam, Bára a navzájem si podali ruce. Určete kolik bylo podání rukou.

P1.2

Žiha

a) 12, 14, 13, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43 = 12 ✓

b) 123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243, ~~24~~ 312, 314, 321, 324,
341, 342, 412, 413, ~~4 14~~ 421, 423, 431, 432, = 24 ✓

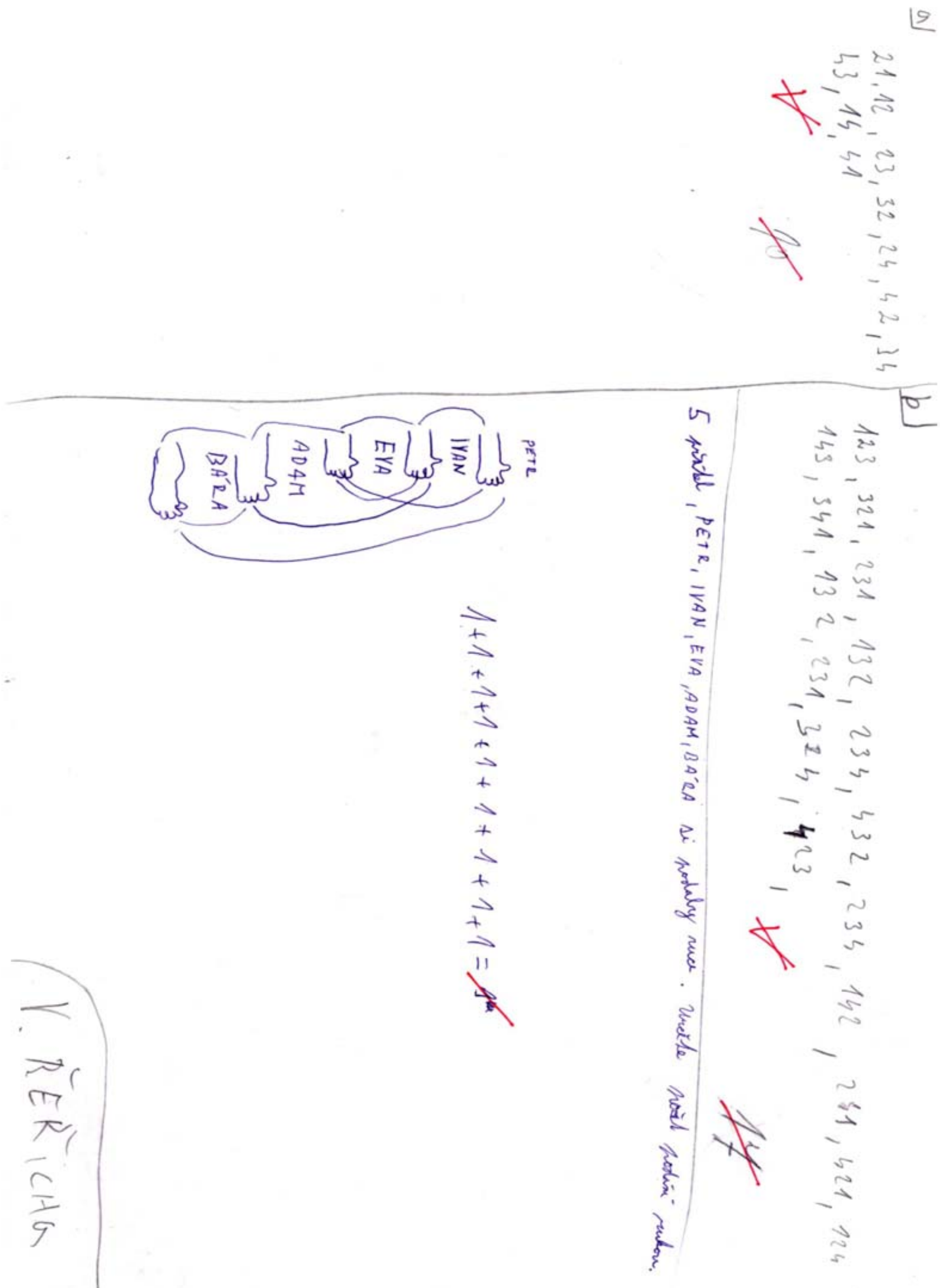
P	P	P	P	B	B	B	A	A	E
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
I	E	A	B	I	E	A	I	E	I

Ruce se podajú 10 ✓ krát.

Komentář:

Žákovské řešení všech úloh pretestu zcela správně.

P1.3



Komentář:

Nesplnění žádné úlohy pretestu zcela správně.

P1.4

130/6

a) ~~11~~, 12, 13, 14, 21, ~~22~~, 23, 24, 31, 32, ~~33~~, 34, 41, 42, 43, ~~44~~ ~~16~~

b) ~~111~~, ~~112~~, ~~113~~, ~~114~~, ~~121~~, ~~122~~, 123, 124, ~~131~~, 132, ~~133~~, 134, ~~141~~, 142, 143, ~~144~~ 16

~~211~~, ~~212~~, 213, 214, ~~221~~, ~~222~~, ~~223~~, ~~224~~, 231, ~~232~~, ~~233~~, 234, 241, ~~242~~, 243, ~~244~~ 16

~~311~~, 312, ~~313~~, 314, 321, ~~322~~, ~~323~~, 324, ~~331~~, ~~332~~, ~~333~~, ~~334~~, 341, 342, ~~343~~, ~~344~~ 16

~~411~~, 412, 413, ~~414~~, 421, ~~422~~, 423, ~~424~~, 431, 432, ~~433~~, ~~434~~, ~~441~~, ~~442~~, ~~443~~, ~~444~~ 16

a) ~~16~~

P I, PE, PA, PB, IE, IA, IB, EA, EB, AB ~~10~~, podání rukou b) ~~64~~

+ systém

celkem) ~~80~~

a) 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43 12

b) 123, 124, ~~125~~ 132, 134, 142, 143, $6 \times 4 =$ ~~16~~ 24

+ vysvětlení

Martin Hasman

Komentář:

Ukázka řešení 1. a 3. úlohy výpisem všech možností.

P1.5

130/6 Anselmová

a) 12, 13, 14, ~~11~~, 21, ~~22~~, 23, 24, 31, 32, ~~33~~, 34, 41, 42, 43, ~~44~~ 16

b) ~~111~~, ~~121~~, ~~131~~, ~~141~~, ~~112~~, ~~113~~, ~~114~~, ~~122~~, ~~133~~, ~~144~~, ~~222~~, ~~333~~, ~~444~~, 123, 124, ~~331~~, ~~332~~, ~~334~~,
321, 341, 342, ~~343~~, 312, ~~313~~, 314, ~~322~~, ~~414~~, 421, 431, ~~441~~, 412, 413, ~~422~~, ~~433~~, 423
~~424~~,

číslice se nesmějí opakovat! 26

PETR = 4 Podání rukou bylo 10
IVAN = 3 Přišla sem na to, že PETR SI PODAL SE VŠEMA A OSTATNÍ TAKY.
EVA = 2
ADAM = 1

Komentář:

Ukázka ne zcela správného pochopení zadání a výpis variant i s opakujícími se číslicemi u 1. a 2. úlohy. Třetí řešena logicky se správným výsledkem.

P1.6

Marie Kyjíková

a) 12, 13, 14, 21, 23, 24, 3~~4~~ 31, 32, 34, 41, 42, 43,

b) 123, 132, 142, 134, ~~1??~~ 124, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 243, 241, 312, 314, 321, 324, 342, 341, 432, 431, 413, 412, 421, 423, 421,

stejné

stejné

dvojciferných čísel je 12 ✓

trojciferných čísel je 26.

přátel 5

podání x

x = 5.5

x = 25

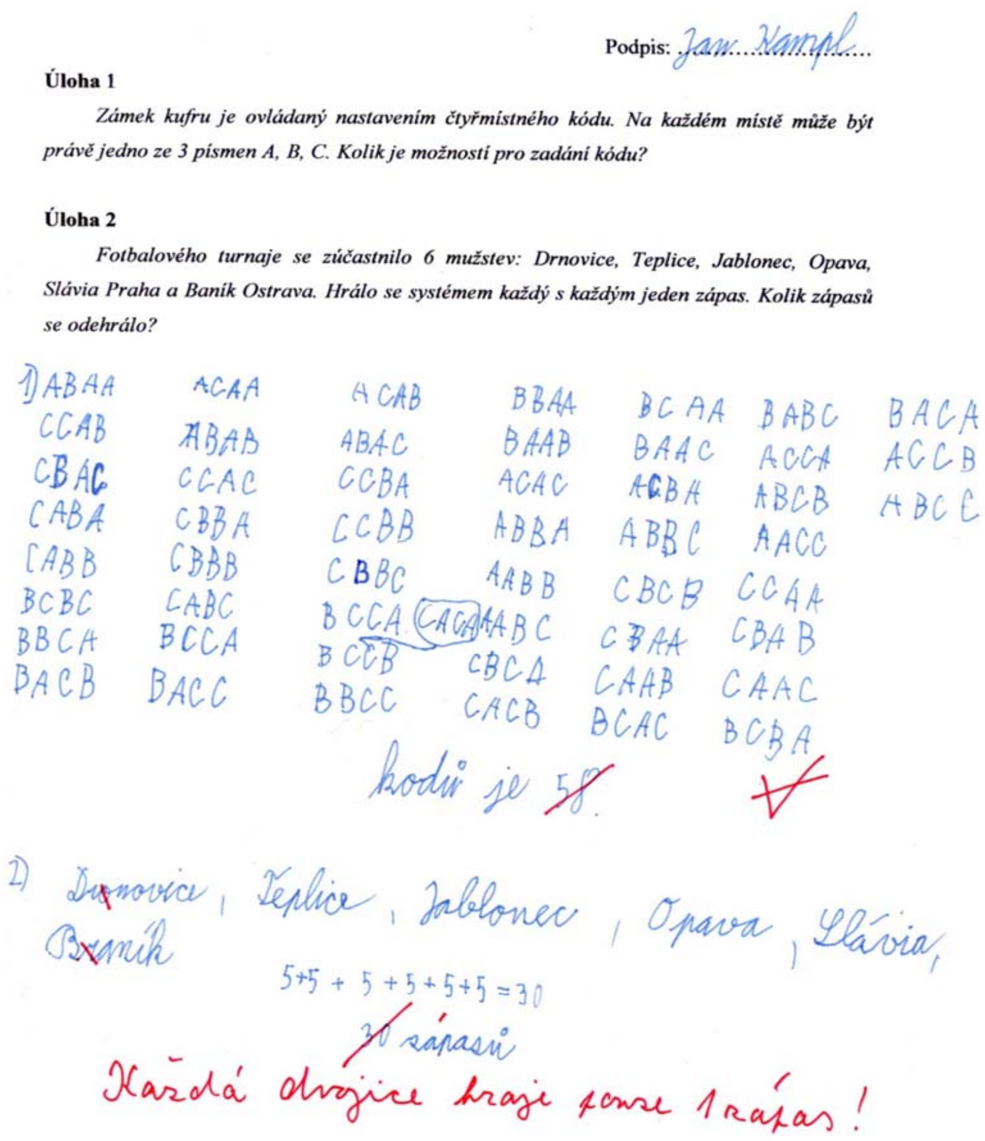
podání bylo 25. ✗ Každá dvojice si podá ruku pouze jednou

Komentář:

Ve 2. úloze vypsána řešení příliš nepřehledně a proto.se opakují stejná čísla. Ve 3. úkolu lze pozorovat špatnou logickou úvahu a opomenutí pravidla, že každá dvojice si podá ruku pouze jedenkrát.

P2. Ukázky žákovských řešení - závěrečný test

P2.1


Podpis: Jan Hampl

Úloha 1

Zámek kufru je ovládaný nastavením čtyřmístného kódu. Na každém místě může být právě jedno ze 3 písmen A, B, C. Kolik je možností pro zadání kódu?

Úloha 2

Fotbalového turnaje se zúčastnilo 6 mužstev: Drnovice, Teplice, Jablonec, Opava, Slávia Praha a Baník Ostrava. Hrálo se systémem každý s každým jeden zápas. Kolik zápasů se odehrálo?

1) ABAA	ACAA	ACAB	BBAA	BCAA	BABC	BACA
CCAB	ABAB	ABAC	BAAB	BAAC	ACCA	ACCB
CBAC	CCAC	CCBA	ACAC	ACBA	ABCB	ABCC
CABA	CBBA	CCBB	ABBA	ABBC	AACC	
CABB	CBBB	CBBC	AABB	CBCB	CCAA	
BCBC	CABC	BCCA CACA	AABC	CBAA	CBAB	
BBCA	BCCA	BCCB	CBCA	CAAB	CAAC	
BACB	BACC	BBCC	CACB	BCAC	BCBA	

kodů je 58.

2) Drnovice, Teplice, Jablonec, Opava, Slávia, Baník

5+5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30

30 zápasů

Každá dvojice hraje pouze 1 zápas!

Komentář:

Nevyřešení žádné úlohy správně, díky nepozornosti a nepřehlednosti řešení u 1. úlohy a špatné úvaze ve 2. případě.

P2.2

Podpis: Martin Olič

Úloha 1

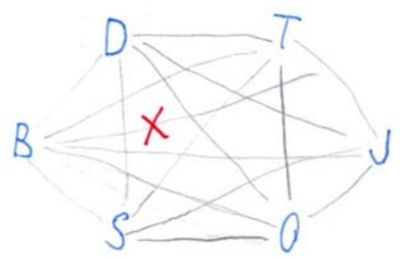
Zámek kufru je ovládaný nastavením čtyřmístného kódu. Na každém místě může být právě jedno ze 3 písmen A, B, C. Kolik je možností pro zadání kódu?

Úloha 2

Fotbalového turnaje se zúčastnilo 6 mužstev: Drnovice, Teplice, Jablonec, Opava, Slávia Praha a Baník Ostrava. Hrálo se systémem každý s každým jeden zápas. Kolik zápasů se odehrálo?

1\. $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \cancel{24}$ kódů

2\.



~~16~~ zápasů

Komentář:

Ve 2. úloze nepřehledné a proto špatné grafické řešení - jedna hrana se vyskytuje dvakrát.

P2.3

Podpis: ..Mašková...Petra....

Úloha 1

Zámek kufru je ovládaný nastavením čtyřmístného kódu. Na každém místě může být právě jedno ze 3 písmen A, B, C. Kolik je možností pro zadání kódu?

Úloha 2

Fotbalového turnaje se zúčastnilo 6 mužstev: Drnovice, Teplice, Jablonec, Opava, Slávia Praha a Baník Ostrava. Hrálo se systémem každý s každým jeden zápas. Kolik zápasů se odehrálo?

1. kód . . . . ABC

AAAA AABA ABBA BAAA

AAAB BBAA ABBA BAAB BARA ABAS

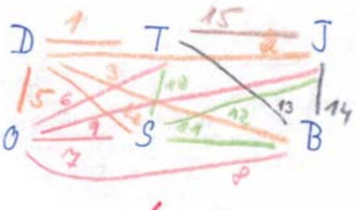
AABB BABB BBAB BBBA

ABBB

1. místo	A, B, C	3
2. místo	A, B, C	3
3. místo	A, B, C	3
4. místo	A, B, C	3
		81 kódu

Kódů bude 81.

2. Drnovice, Teplice, Jablonec, Opava, Slávia, Baník



Odehrálo se 15 zápasů.

Komentář:

Správné řešení obou úloh závěrečného testu. Nejprve dívka zvolila výpis možností, ale uvědomila si jeho obtížnost a hledala jiné.

P2.4

Podpis: Tomáš Kubiček......

Úloha 1

Zámek kufru je ovládaný nastavením čtyřmístného kódu. Na každém místě může být právě jedno ze 3 písmen A, B, C. Kolik je možností pro zadání kódu?

Úloha 2

Fotbalového turnaje se zúčastnilo 6 mužstev: Drnovice, Teplice, Jablonec, Opava, Slávia Praha a Baník Ostrava. Hrálo se systémem každý s každým jeden zápas. Kolik zápasů se odehrálo?

4 na ABC, v jednom místě AB nebo C = 3
3.3.3.3 = 81
kódů je 81

2.

	D	T	J	O	S	B
D	nehraje	1	2	3	4	5
T	1	nehraje	6	7	8	9
J	2	6	nehraje	10	11	12
O	3	7	10	nehraje	13	14
S	4	8	11	13	nehraje	15
B	5	9	12	14	15	nehraje

zápasů se odehrálo 15

Komentář:

Ukázka správného řešení 2. úlohy pomocí tabulky.